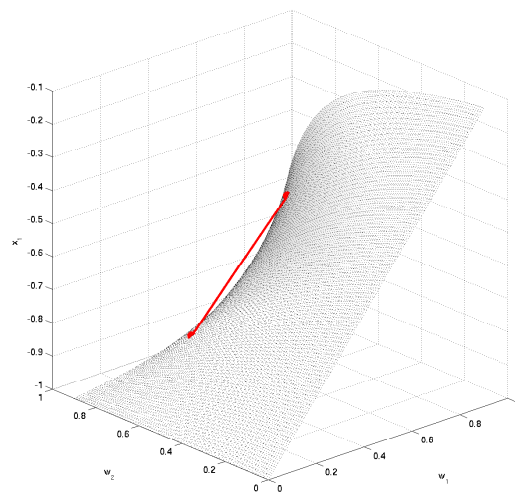


Analyse und Konstruktion von Parrondo-Paradoxa



Jae Hee Lee

Diplomarbeit zur Erlangung des Grades Diplom-Mathematiker
Universität Bremen
März 2009

Erstgutachter: Prof. Dr. Dr. Ulrich Krause
Universität Bremen

Zweitgutachter: Prof. Dr. Peter Maaß
Universität Bremen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Parrondos Paradoxon	8
2.1	Parrondo-Spiele	8
2.2	Markovketten	10
2.3	Perron-Frobenius Theorie	12
2.4	Parrondo-Spiele als Markovkette	14
2.5	Parrondo-Behrends-Spiele	17
2.6	Parrondos Paradoxon als Parrondo-Behrends Spiel	18
2.7	Eine zentrale Formel	23
3	Analyse der Parrondo-Behrends-Spiele	28
3.1	Parrondos Paradox ist überall	28
3.2	Analyse	30
4	Vergangenheitsabhängige Spiele	46
4.1	Vergangenheitsabhängige Spiele von Parrondo et. al.	47
4.2	Ein allgemeines Modell	50
5	Schluss	60
5.1	Fazit	60
5.2	Ausblick	62
A	Programmierung	63

Symbolverzeichnis

- $[\]_i$ liefert das i -te Element eines Vektors.
- $[\]_{ij}$ liefert das (i, j) -te Element einer Matrix .
- $\langle \ , \ \rangle$ Skalarprodukt.
- $\#M$ liefert die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M .
- A^{ad} die zu einer quadratischen Matrix A adjungierte Matrix, Seite 23.
- A^T die transponierte Matrix von A .
- \mathcal{B} steht für $\prod_{i=1}^n B_+^{s_i} \subset \mathbb{R}^s$, Seite 34.
- B_+^k steht für $\{x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^k \mid x_i > 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$, Seite 34.
- \mathcal{C} die Menge aller stochastischen Matrizen vom Spieltyp Γ , Seite 35.
- c_k steht für das Kapital nach k Runden eines vergangenheitsabhängiges Spiels, Seite 51.
- $C^p(\Omega)$ steht für die Menge aller p -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω .
- diag liefert die Diagonalelemente einer quadratischen Matrix, Seite 24.
- Γ Spieltyp von PB-Spielen, Seite 33.
- $\mathcal{G}(P)$ Graph einer Übergangsmatrix P , Seite 12.
- ker der Kern einer linearen Abbildung bzw. einer Matrix.
- Λ_i steht für $\{(i, j) \mid \gamma_{ij} = 1, j \neq m_i(\Gamma), j \in \{1, \dots, n\}\}$, Seite 34.
- Λ steht für $\bigcup_i^n \Lambda_i$, Seite 34.
- m_i steht für $\min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid \gamma_{ij} = 1\}$, Seite 34.
- N Nullstellenmenge der Abbildung $(w, x) \mapsto \langle \tau(Q(w)), x \rangle$, Seite 37.

- ϕ Funktion, die die asymptotische Gewinnerwartung einer Konvexkombination von zwei PB-Spielen in Abhängigkeit von ihrem Mischungsparameter liefert, Seite 21.
- $P(\lambda)$ Konvexkombination von PB-Matrizen, Seite 18.
- Q Abbildung, die jedem Element aus \mathcal{B} eine stochastische Matrix zuordnet, Seite 34.
- \mathbb{R}_0^k steht für $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$, $0 \leq k \leq n-1$, Seite 32.
- rg der Rang einer linearen Abbildung bzw. einer Matrix.
- ρ Abbildung, die die Elemente von $D \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ nach ihrer lexikographischen Ordnung nummeriert, Seite 33.
- s_i steht für $\#A_i(\Gamma)$, Seite 34.
- s steht für $\sum_{i=1}^n s_i = \#A$, Seite 34.
- σ ist eine bijektive Abbildung zwischen S^n und $\{0, 1, \dots, m^n - 1\}$, wobei S eine m -elementige Zustandsmenge ist., Seite 53.
- τ Abbildung, die einer Matrix ein Vielfaches von ihrem Perron-Eigenvektor zuordnet, Seite 37.
- $x(\lambda)$ Konvexkombination von Gewinnvektoren, Seite 18.

Kapitel 1

Einleitung

*Es mag ein Paradox sein, aber in
den Paradoxen liegt Wahrheit.*

G. K. Chesterton (1874 - 1936)

Die vorliegende Diplomarbeit behandelt Parrondos Paradoxon.

Der spanischer Physiker J.M.R. Parrondo stellte im Jahr 1996 auf einer Tagung ein Paradoxon vor, das als eine Illustration für die Arbeitsweise des Brownschen Motors diene [20]. Dabei geht es um zwei Spiele, genannt *Parrondo-Spiele*, von denen man jedes auf Dauer mit Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$ verliert; spielt man sie aber abwechselnd, so gewinnt man durch diese Kombination der Spiele mit Wahrscheinlichkeit größer als $1/2$. Das ist ein Phänomen, das der Intuition widerspricht und daher als Paradoxon bezeichnet wird.

Dieses Paradoxon übersetzten D. Abbott und G. P. Harmer [9] in die Sprache der Markovketten und öffneten den Zugang zur mathematische Analyse von Parrondo-Spielen. Einige Jahre später folgte eine Verallgemeinerung dieser Spiele durch E. Behrends [1], genannt *Parrondo-Behrends-Spiele* von P. Groeber in [5]. Dort untersuchte er das Konvergenzverhalten von Konvexkombinationen zweier primitiver stochastischer Matrizen. Dabei blieben einige Fragen offen, die eines tieferen Verständnisses über den Perron-Eigenvektor einer primitiven stochastischen Matrix bedürfen.

Die Arbeit beginnt mit einer ausführlichen Vorstellung des Paradoxons (Kapitel 1) sowie der Lösung der offenen Fragen (Kapitel 2). Es wird bewiesen, dass man mit Hilfe der Perron-Frobenius Theorie über die Existenz der stationären Verteilung einer primitiven stochastischen Matrix hinaus noch eine explizite Darstellung des Perron-Eigenvektors zeigen kann.

Kapitel 3 befasst sich mit einer zentralen Frage hinsichtlich Parrondos Paradoxons: Ist es möglich, zu jedem beliebigen fairen Parrondo-Behrends-Spiel (PB-Spiel) ein weiteres faires PB-Spiel zu finden, so dass der Parrondo-Effekt

hergestellt werden kann? Für die Beantwortung dieser Frage wird eine Bijektion zwischen einer $n - 1$ dimensionalen C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und der Menge aller fairen PB-Spiele eines primitiven Spieltyps konstruiert, wobei jedes faire PB-Spiel durch genau einen Punkt auf der Untermannigfaltigkeit repräsentiert wird. So wird ermöglicht, die Analyse der PB-Spiele auf die Analyse der Untermannigfaltigkeit zu übertragen. Als Resultat erhalten wir, dass man wegen der besonderen Gekrümmtheit dieser Untermannigfaltigkeit zu jedem fairen PB-Spiel stets ein weiteres faires PB-Spiel finden kann, so dass die Konvexkombination der beiden Spiele für einen bestimmten Mischungsparameter *kein* faires Spiel ist.

Kapitel 4 widmet sich einer Erweiterung von Parrondos Paradox, der so genannten *vergangenheitsabhängigen Spielen* (*history-dependent games*) [21]. Das Besondere an diesen Spielen ist, dass auf die Kapitalabhängigkeit der ursprünglichen Parrondo-Spiele verzichtet wird, wodurch derartige Spiele für eine breite Anwendung besser geeignet sind. Dabei beschränken wir uns nicht nur auf das Original-Beispiel von vergangenheitsabhängigen Spielen. Es wird ein Modell vorgestellt, das dieses Original-Beispiel verallgemeinert. Darüber hinaus wird bewiesen, dass jedes vergangenheitsabhängige Spiel unter einer bestimmten Voraussetzung ein PB-Spiel ist und sich somit die asymptotische Gewinnwahrscheinlichkeit berechnen lässt.

Abschließend wird die Arbeit zusammengefasst und es werden noch offene Fragen vorgestellt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank gebührt dabei meinem Betreuer Ulrich Krause, der mit großer Sorgfalt meine Entwürfe gelesen und mir hilfreiche Anregungen gegeben hat. Darüber hinaus möchte ich Peter Maaß danken, der freundlicherweise die Aufgabe des zweiten Gutachters meiner Diplomarbeit übernommen hat.

Mein Dank gilt Angelika Viohl und Christoph Buck, die meine Diplomarbeit mit großer Sorgfalt Korrektur gelesen haben. Danken möchte ich auch Patrick Groeber und Roland Bauerschmidt für die wertvollen Gespräche und Anregungen.

Mein ganz besonderer Dank gilt abschließend meinen Eltern, die meine Arbeit mit Liebe und Unterstützung begleitet haben.

Kapitel 2

Parrondos Paradoxon

Parrondos Paradoxon ist die bekannte, der Intuition widersprechende Situation, bei der einzelne Verluststrategien zur Gewinnstrategie kombiniert werden können. Die Original-Parrondo-Spiele [8, 9] wurden als eine Analogie zum Brownschen Motor 1996 [20] entworfen. Seitdem regten sie Forschungen in verschiedenen Gebieten an, von der Wirtschaftslehre [11] über physikalische Quantensysteme [4, 15, 19] bis hin zur Populationsgenetik [16, 22, 24]. Ein vollständiger Überblick ist in [10] zu sehen.

In diesem Kapitel wird eine Einführung in Parrondos Paradoxon gegeben.

2.1 Parrondo-Spiele

Es handelt sich in dem Original-Beispiel von Parrondo um zwei Münzwurfs-Spiele A und B , bei denen man in jeder Spielrunde einen Euro gewinnt bzw. verliert. Das Kapital ist hierbei eine ganze Zahl, wobei auch ein negativer Betrag zugelassen ist.

In Spiel A wird eine nicht notwendigerweise faire Münze geworfen, so dass man das Spiel mit Wahrscheinlichkeit p gewinnt oder mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p$ verliert.

Die Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeiten des Spiels B hängen hingegen vom bisherigen Spielverlauf ab: Ist das Kapital durch M teilbar, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit p_1 und die Verlustwahrscheinlichkeit $1 - p_1$. Andernfalls ist die Gewinnwahrscheinlichkeit p_2 und die Verlustwahrscheinlichkeit $1 - p_2$.

Der Aufbau der beiden Spiele ist in Abbildung 2.1 mithilfe von Diagrammen dargestellt.

Parrondo wählte in seinem Original-Beispiel [20] $M = 3$ sowie die Gewinn-

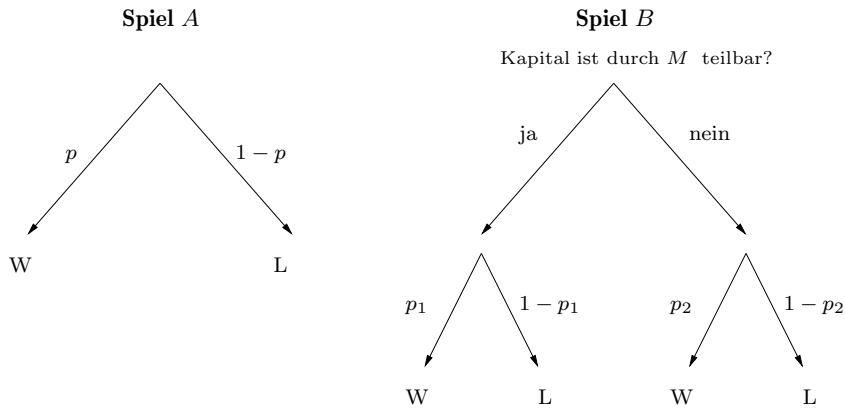


Abbildung 2.1 – Aufbau von Parrondo-Spielen. Die Spiele sind hier durch Verzweigungen dargestellt. Das Spiel A besteht aus Gewinn (W) und Verlust (L) um jeweils eine Einheit mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$. In Spiel B wird zuerst entschieden, ob das Kapital durch M teilbar ist.

wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{2} - \epsilon \\
 p_1 &= \frac{1}{10} - \epsilon \\
 p_2 &= \frac{3}{4} - \epsilon,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\epsilon > 0$ ein Verzerrungsparameter ist, mit dem man die drei Wahrscheinlichkeiten kontrollieren kann.

Eine mathematische Analyse mit der Theorie der Markovketten ermöglicht die Berechnung der asymptotischen Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spiele A und B . Es ergibt sich dadurch, dass die beiden Spiele mit den Werten aus (2.1) für $0 < \epsilon < \frac{1}{10}$ jeweils Verlustspiele, d. h. Spiele mit asymptotischer Gewinnerwartung $-\infty$ sind.

Spielt man aber eine Kombination aus Spiel A und Spiel B , indem man z. B. in jeder Runde eines aus den beiden Spielen mit Wahrscheinlichkeit $\lambda = 0.5$ auswählt, so führt dies für $\epsilon = 1/1000$ zu einem überraschenden Ergebnis: das kombinierte Spiel, von nun an als *Parrondo-Spiel* bezeichnet, besitzt die asymptotische Gewinnerwartung $+\infty$. In Abbildung 2.2 wird die durchschnittliche Kapitalentwicklung von Spiel A und Spiel B sowie ihre Konvexkombination graphisch dargestellt, welche aus einer Computer-Simulation hervorgeht. Dabei ist $\epsilon = 1/200$ gewählt.

In den nächsten beiden Abschnitten werden grundlegende Begriffe und Ergebnisse der Markovketten und der Perron-Frobenius Theorie vorgestellt, die für die Analyse dieses nicht-intuitiven Phänomen notwendig sind. Als Grundlage dienen [7] sowie [18].

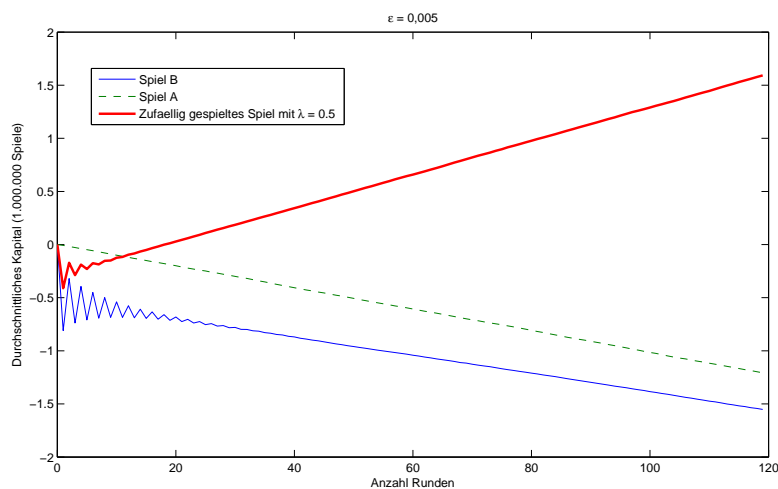


Abbildung 2.2 – Durchschnittliche Kapitalentwicklung von Spiel A und Spiel B mit Originaldaten gemäß (2.1) und $\epsilon = 1/200$ sowie Konvexkombination beider Spiele über 120 Runden nach einer Million Spielen.

2.2 Markovketten

Definition 2.2.1. Sei $P = (p_{ij})_{i,j}$ eine $(n \times n)$ Matrix. Ein stochastischer Prozess¹ (X_0, X_1, \dots) mit endlicher Zustandsmenge $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ heißt eine *Markovkette mit Übergangsmatrix* P , wenn für alle k , alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $i_0, \dots, i_{k-1} \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = s_j \mid X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{k-1} = s_{i_{k-1}}, X_k = s_i) \\ &= \mathbf{P}(X_{k+1} = s_j \mid X_k = s_i) \\ &= p_{ij}. \end{aligned}$$

Die Elemente der Übergangsmatrix P werden als Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet. Die Übergangswahrscheinlichkeit p_{ij} ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass man zum Zeitpunkt t im Zustand s_j sein wird, unter der Bedingung, dass man zum Zeitpunkt $t - 1$ bei s_i ist.

Jede Übergangsmatrix erfüllt

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

und

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

¹Ein stochastischer Prozess ist eine Menge von Zufallsvariablen (X_1, X_2, \dots) , deren Elemente X_t dieselbe Wertemenge $\{s_1, \dots, s_n\}$ besitzen, die man als Zustandsmenge bezeichnet.

Eigenschaft (2.2) folgt aus der Tatsache, dass bedingte Wahrscheinlichkeiten stets nicht negativ sind, und Eigenschaft (2.3) besagt, dass sie zu 1 summiert werden, d. h.

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(X_{k+1} = s_j \mid X_k = s_i) = 1.$$

Allgemein werden wir im folgenden Matrizen mit Eigenschaft (2.2) und (2.3) als *(zeilen-)stochastisch* bezeichnen.

Als nächstes betrachten wir ein anderes wichtiges Merkmal der Markovketten (X_0, X_1, \dots) , nämlich die *Anfangsverteilung*, die uns mitteilt, wie die Markovkette startet. Die Anfangsverteilung wird repräsentiert als ein Zeilenvektor $\mu^{(0)}$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu^{(0)} &= (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_n^{(0)}) \\ &= (\mathbf{P}(X_0 = s_1), \mathbf{P}(X_0 = s_2), \dots, \mathbf{P}(X_0 = s_n)). \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise definieren wir die Zeilenvektoren $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots$ als Verteilung der Markovkette zum Zeitpunkt 1, 2, \dots

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= (\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_n^{(k)}) \\ &= (\mathbf{P}(X_k = s_1), \mathbf{P}(X_k = s_2), \dots, \mathbf{P}(X_k = s_n)). \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass man mit der Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und der Übergangsmatrix P alle Verteilungen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots$ der Markovkette berechnen kann. Dies besagt die folgende Proposition.

Proposition 2.2.2. *Sei eine Markovkette (X_0, X_1, \dots) mit Zustandsmenge $\{s_1, \dots, s_n\}$, Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und Übergangsmatrix P gegeben. Dann gilt für die Verteilung $\mu^{(k)}$ zum Zeitpunkt k :*

$$\mu^{(k)} = \mu^{(0)} P^k.$$

Beweis. Siehe [7, S. 11]. □

Wir werden eine beliebige Matrix $P = (p_{ij})_{i,j}$ als nicht-negativ bezeichnen, wenn $p_{ij} \geq 0$ für alle i, j . Stochastische Matrizen sind z. B. nicht-negativ. Gilt sogar $p_{ij} > 0$, so schreiben wir $P > 0$. Entsprechend ist ein Vektor $x = (x_i)_i$ nicht-negativ, falls $x_i \geq 0$, und wir bezeichnen $x > 0$, wenn $x_i > 0$ für alle i .

Die nächste Definition kommt erst später zum Tragen. In der Tat lässt sich der Prozess einer Markovkette mit einem gewichteten Graphen anschaulich darstellen.

Definition 2.2.3. Ein Graph $\mathcal{G}(P)$ einer Übergangsmatrix P der Markovkette (X_0, X_1, \dots) mit Zustandsmenge $\{s_1, \dots, s_n\}$ ist definiert als ein gerichteter gewichteter Graph auf der Zustandsmenge $\{s_1, \dots, s_n\}$, in dem genau dann eine Kante von s_i nach s_j mit Gewicht p_{ij} existiert, wenn $p_{ij} > 0$.

Die folgende Definition ist ein wichtiger Bestandteil der Perron-Frobenius Theorie, den wir im nächsten Abschnitt behandeln werden.

Definition 2.2.4. Eine nicht-negative Matrix P heißt primitiv, wenn es eine natürliche Zahl k gibt, so dass $P^k > 0$.

2.3 Perron-Frobenius Theorie

Für eine Matrix A bezeichnen wir einen Zeilenvektor x als ein Linkseigenvektor von A zum Eigenwert λ , wenn x^T ein (Rechts-)Eigenvektor von A^T zum Eigenwert λ ist, d. h.

$$xA = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad A^T x^T = \lambda x^T.$$

Definition 2.3.1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Die Menge $\sigma(A)$ aller Eigenwerte heißt das Spektrum von A , und der Spektralradius von A ist die nicht-negative Zahl

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Es gilt

$$\rho(A) = \rho(A^T) \leq \|A\|$$

für alle Matrixnormen.

Der folgende Satz ist das Perron-Frobenius Theorem aus [18, S. 673] für primitive Matrizen.

Satz 2.3.2. *Ist eine Matrix A primitiv, dann gelten folgende Aussagen:*

1. *Es gibt genau einen Eigenwert λ von A mit $|\lambda| = \rho(A)$. (λ heißt die Perron-Wurzel).*
2. $\lambda > 0$.
3. $\text{alg mult}_A(\lambda) = 1$. (Die Perron-Wurzel ist einfach).
4. *Es gibt einen Eigenvektor $x > 0$ mit $Ax = \lambda x$.*
5. *Der Perron-Eigenvektor ist der eindeutige Vektor definiert durch*

$$A\pi = \lambda\pi, \quad \pi > 0, \quad \|\pi\|_1 = 1.$$

Satz 2.3.3. *Es gilt für eine primitive Matrix A :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k = \frac{pq}{qp} > 0, \quad (2.4)$$

wobei λ die Perron-Wurzel von A ist, und p und q die zu λ gehörende Rechts- bzw. Links-Perron-Eigenvektoren sind.

Beweis. Siehe [18, S. 674]. □

Satz 2.3.4. Für eine stochastische Matrix P gilt $\rho(P) = 1$.

Beweis. Da P eine stochastische Matrix ist, gilt

$$1 = \|P\|_\infty := \max_i \sum_j |p_{ij}|$$

und für den Spaltenvektor $e = (1, \dots, 1)^T$ gilt

$$Pe = e.$$

Da $(1, e)$ ein (Rechts-)Eigenpaar für jede stochastische Matrix ist und $\rho(\star) \leq \|\star\|$ für alle Matrixnormen gilt, so

$$1 \leq \rho(P) \leq \|P\|_\infty = 1 \implies \rho(P) = 1.$$

□

Korollar 2.3.5. Für eine primitive stochastische Matrix P gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $\pi > 0$ (den Links-Perron-Eigenvektor) zum Eigenwert 1 mit

$$\pi P = \pi \quad \text{und} \quad \|\pi\|_1 = 1.$$

Die bisherigen Ergebnisse der Perron-Frobenius Theorie ermöglichen uns die Zeitentwicklung der Markovketten zu analysieren, deren Übergangsmatrizen primitiv sind. Sei dafür (X_1, X_2, \dots) eine Markovkette mit Zustandsmenge (s_1, \dots, s_n) , Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und primitiver Übergangsmatrix P . Der Rechts-Perron-Eigenvektor von P ist $\frac{1}{n}e = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^T$. Ist $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ der Links-Perron-Eigenvektor von P , dann ist nach (2.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \frac{(e/n)\pi}{\pi(e/n)} = \frac{e\pi}{\pi e} = e\pi = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Damit existiert eine Verteilung im Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{(0)} P^k = \mu^{(0)} e\pi^T = \pi^T,$$

die wir auch als *stationäre Verteilung* bezeichnen. Es ist zu beachten, dass der Term $\mu^{(0)}e$ wegen $\sum_k \mu_k^{(0)} = 1$ verschwindet, und daher der Grenzwert unabhängig ist von der Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$.

Weil dieses Ergebnis für die kommenden Analysen entscheidend ist, formulieren wir dies als einen Satz. Dabei ist, im Zusammenhang mit stochastischen Matrizen, der Perron-Eigenvektor einer Matrix von nun an stets als der Links-Perron-Eigenvektor zu verstehen.

Satz 2.3.6. Sei $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit Zustandsmenge (s_1, \dots, s_n) , Anfangsverteilung $\mu^{(0)}$ und primitiver Übergangsmatrix P . Dann konvergiert die Verteilung $\mu^{(k)}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen den Perron-Eigenvektor von P .

Im nächsten Abschnitt wird Parrondos Paradoxon mit den bisher vorgestellten mathematischen Mitteln analysiert. Dabei wird die Darstellung von E. Behrends [1] verwendet, die nach [5] allgemeiner ist als die von G. P. Harmer und D. Abbott [10].

2.4 Parrondo-Spiele als Markovkette

Spiel A und Spiel B werden zunächst als Markovkette (X_1^A, X_2^A, \dots) bzw. (X_1^B, X_2^B, \dots) mit Zustandsmenge \mathbb{Z} , Anfangsverteilung $\mu = (\mu_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\mu_0 = 1$ und $\mu_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und Übergangsmatrizen P_A bzw. P_B aufgefasst. Die Zustände entsprechen den möglichen Kapitalbeträgen und X_k repräsentiert das Kapital nach der k -ten Runde. Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Zuständen werden durch die Spielregeln bestimmt.

Da die Zustandsmenge \mathbb{Z} ist, sind die Übergangsmatrizen für beide Spiele keine Matrizen im gewöhnlichen Sinn, sondern Matrizen mit Indexmenge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Bei Spiel A wird nach jeder Spielrunde das Kapital um eins erhöht bzw. erniedrigt, jeweils mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$. Dieser Vorgang wird in Abbildung 2.3 durch einen Graphen dargestellt.

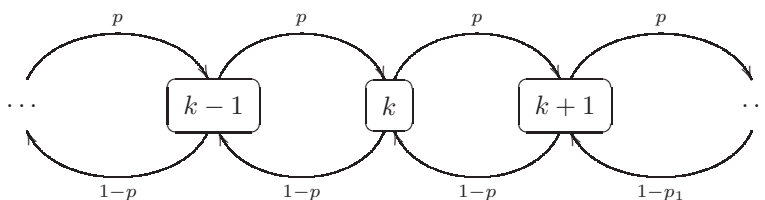


Abbildung 2.3 – Markovkette zu Spiel A . Die eingerahmten Zustände repräsentieren die möglichen Kapitalbeträge.

Der Graph in Abbildung 2.3 ist zugleich der Graph $\mathcal{G}(P_A)$ der Übergangsmatrix P_A mit

$$P_A = \begin{matrix} & & & & i \\ & & & & \downarrow \\ & \dots & \dots & \dots & \\ i \rightarrow & & 1-p & 0 & p \\ & & & 1-p & 0 & p \\ & & & & 1-p & 0 & p \\ & & & & & \dots & \dots & \dots \end{matrix}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

definiert durch

$$[P_A]_{ij} = \mathbf{P}(X_{k+1}^A = j \mid X_k^A = i) = \begin{cases} p & \text{falls } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{falls } j = i - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Während die Übergangswahrscheinlichkeiten von Spiel A unabhängig vom aktuellen Kapital ist, hängen die von Spiel B vom Rest Modulo M des aktuellen Kapitals ab. Die Abbildung 2.4 stellt die Markovkette zu Spiel B dar, wobei $M = 3$ gewählt ist.

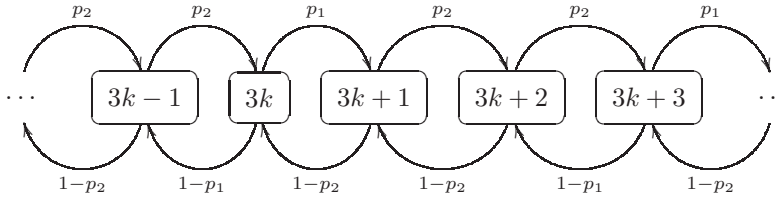


Abbildung 2.4 – Markovkette zu Spiel B . Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind vom aktuellen Kapital abhängig. Ist der aktuelle Kapitalbetrag gleich einem Vielfachen von M (hier $M = 3$), wird das Kapital mit Wahrscheinlichkeit p_1 (bzw. $1 - p_1$) um eins erhöht (bzw. erniedrigt). Andernfalls gelten die Übergangswahrscheinlichkeiten p_2 für die Kapitalerhöhung, und $1 - p_2$ für die Kapitalerniedrigung.

Abbildung 2.4 ist der Graph $\mathcal{G}(P_B)$ der Übergangsmatrix P_B mit

$$P_B = \begin{matrix} & & & & kM \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 1-p_2 & 0 & p_2 \\ kM \rightarrow & & & 1-p_1 & 0 & p_1 \\ & & & & 1-p_2 & 0 & p_2 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

definiert durch

$$[P_B]_{ij} = \mathbf{P}(X_{k+1}^B = j \mid X_k^B = i) = \begin{cases} p_1 & \text{falls } j = i + 1, i = 0 \pmod{M} \\ 1 - p_1 & \text{falls } j = i - 1, i = 0 \pmod{M} \\ p_2 & \text{falls } j = i + 1, i \neq 0 \pmod{M} \\ 1 - p_2 & \text{falls } j = i - 1, i \neq 0 \pmod{M} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anstatt uns mit obigen Übergangsmatrizen zu beschäftigen, die schwierig zu handhaben sind, definieren wir die stochastischen Prozesse $(X_k^A)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(X_k^B)_{k \in \mathbb{N}}$ um zu

$$Y_k^A := X_k^A \pmod{M}$$

und

$$Y_k^B := X_k^B \pmod{M}.$$

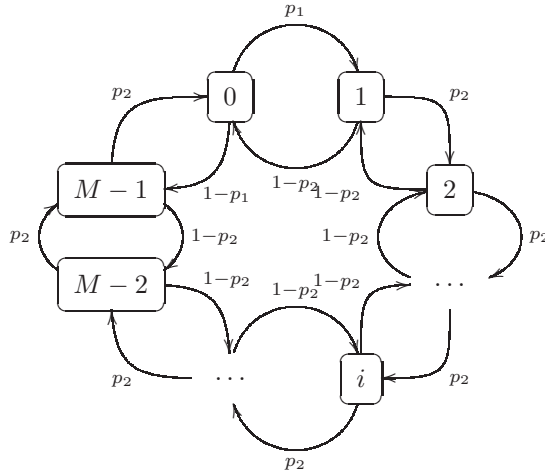
So wird die Zustandsmenge auf $\{0, 1, \dots, M-1\}$ reduziert und die Übergangsmatrizen für Spiel A und Spiel B werden ersetzt durch $(M \times M)$ Matrizen

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 & p & & & 1-p \\ 1-p & 0 & \ddots & & \\ & 1-p & \ddots & p & \\ & & \ddots & 0 & p \\ p & & & 1-p & 0 \end{bmatrix}$$

bzw.

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & & & 1-p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 & & \\ & 1-p_2 & 0 & \ddots & \\ & & 1-p_2 & \ddots & p_2 \\ & & & \ddots & 0 & p_2 \\ p_2 & & & & 1-p_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Der Graph $\mathcal{G}(P_B)$ der Übergangsmatrix P_B ist damit



Die Nützlichkeit der neuen Auffassung gewinnt insbesondere dadurch eine Bedeutung, dass die neuen Übergangsmatrizen nach [5] für M ungerade primitive Matrizen sind und damit stationäre Verteilungen für ihre Markovketten existieren.

Dabei entsteht allerdings auch der Nachteil, dass die Bedeutung der Zustandsmenge als mögliche Kapitalbeträge verloren geht, da die Zustandsmenge von \mathbb{Z} auf $\{1, 2, \dots, M\}$ reduziert wird. Im nächsten Abschnitt wird jedoch gezeigt, dass dies keine Einschränkung für unsere Analyse ist.

2.5 Parrondo-Behrends-Spiele

In Parrondo-Behrends Spielen, kurz *PB-Spielen*, gibt eine stochastische $(n \times n)$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine diskrete Markovkette mit Zustandsmenge $\{0, \dots, n-1\}$ an, die in Zustand 0 gestartet wird. An Zustand i angekommen erhält der Spieler die „Belohnung“ $x_i \in \mathbb{R}$, die nicht von der aktuellen Spielrunde abhängt.

Definition 2.5.1. Das Spiel, das durch eine primitive stochastische $(n \times n)$ Matrix P und einen Zeilenvektor $x = (x_i)_{0 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, wird mit (P, x) bezeichnet. Dabei heißt P *Parrondo-Behrends-Matrix (PB-Matrix)* und x Gewinnvektor sowie (P, x) *Parrondo-Behrends-Spiel (PB-Spiel)*.

Wird das Spiel (P, x) in Zustand $i \in \{0, \dots, n-1\}$ angefangen, so ist der erwartete Gewinn des Spiels (P, x) nach k Runden die i -te Komponente des Vektors

$$\left(\sum_{j=0}^k P^j \right) x^T, \quad (2.6)$$

wobei das Spiel mit 0-ter Runde angefangen wird.

Ist hingegen der Anfangszustand zufällig nach einem stochastischen Vektor $\mu \in \mathbb{R}^n$ gewählt, so ist der erwartete Gewinn des Spiels (P, x) nach k Runden

$$\mu \left(\sum_{j=0}^k P^j \right) x^T.$$

Angenommen, die Matrix P ist primitiv. Dann konvergiert P gegen eine Matrix mit identischen Zeilenvektoren π_P , dem Perron-Vektor bzw. der stationären Verteilung von P . Nach [5, S. 33] ist der erwartete Gewinn ∞ , wenn $\langle \pi_P, x \rangle$ positiv, und $-\infty$, wenn $\langle \pi_P, x \rangle$ negativ ist. Für $\langle \pi_P, x \rangle = 0$ konvergiert mit $m \rightarrow \infty$ der erwartete Gewinn gegen eine reelle Zahl.

Definition 2.5.2. Sei P eine PB-Matrix, π_P der Perron-Eigenvektor von P , x ein Gewinnvektor sowie $\langle \pi_P, x \rangle$ die asymptotische Gewinnerwartung für das Spiel (P, x) . Dann heißt (P, x)

- *Gewinnspiel*, falls $\langle \pi_P, x \rangle > 0$
- *Verlustspiel*, falls $\langle \pi_P, x \rangle < 0$

- *fares* Spiel, falls $\langle \pi_P, x \rangle = 0$

Definition 2.5.3. Seien $(P_1, x_1), \dots, (P_r, x_r)$ PB-Spiele und sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ ein *stochastischer* Vektor, d. h. $\sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$, $\lambda_k \geq 0$. Dann heißt $(P(\lambda), x(\lambda))$ eine *Konvexkombination* dieser Spiele, wobei

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k$$

die PB-Matrix sowie

$$x(\lambda) = \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k$$

den Gewinnvektor dieses Kombinations-Spiels definieren.

Speziell für $r = 2$ ist wird der Einfachheit halber die Bezeichnung

$$P(\lambda) = \lambda P_1 + (1 - \lambda) P_2$$

sowie

$$x(\lambda) = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$$

verwendet, wobei $\lambda \in [0, 1]$.

Betrachten wir nun r PB-Spiele $(P_1, x_1), \dots, (P_r, x_r)$. In jeder Runde wird eines der Spiele anhand eines stochastischen Vektors gespielt. Diese Strategie entspricht dem Spielen ihrer Konvexkombination $(P(\lambda), x(\lambda))$.

2.6 Parrondos Paradoxon als Parrondo-Behrends Spiel

In diesem Abschnitt wird die asymptotische Gewinnerwartung von Spiel A und Spiel B sowie ihrer Konvexkombination bestimmt. Dafür verwenden wir die Darstellungen der Spiele aus Abschnitt 2.4. So sind Spiel A , Spiel B und ihre Konvexkombination in der Formulierung der PB-Spiele (P_A, x_A) , (P_B, x_B) und $(P(\lambda), x(\lambda))$ definiert auf dem Zustandsraum $\{0, 1, \dots, M - 1\}$. Dabei sind

$$P_A = \begin{bmatrix} 0 & p & & & 1-p \\ 1-p & 0 & \ddots & & \\ & 1-p & \ddots & p & \\ & & \ddots & 0 & \\ p & & & 1-p & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & & & 1-p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 & & \\ & 1-p_2 & 0 & \ddots & \\ & & 1-p_2 & \ddots & p_2 \\ & & & \ddots & 0 & p_2 \\ p_2 & & & & 1-p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$P(\lambda) = \lambda P_A + (1 - \lambda) P_B.$$

Der Zustandswechsel von i nach $i + 1 \bmod M$ beinhaltet hier das Gewinnen der Spielrunde bzw. die Erhöhung des Kapitals um eine Einheit. Entsprechend ist der Zustandswechsel von i nach $i - 1 \bmod M$ das Verlieren der aktuellen Spielrunde bzw. die Erniedrigung des Kapitals um eine Einheit.

Zur Bestimmung der Gewinnvektoren x_A und x_B betrachtet man die im jeweiligen Zustand zu erwartenden Erträge. Für Spiel A lauten diese stets

$$[x_A]_i = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (-1), \quad 0 \leq i \leq M - 1,$$

für Spiel B

$$[x_B]_i = \begin{cases} p_1 \cdot 1 + (1 - p_1) \cdot (-1) & \text{für } i = 0 \\ p_2 \cdot 1 + (1 - p_2) \cdot (-1) & \text{für } 1 \leq i \leq M - 1 \end{cases}$$

Die Übergangsmatrizen P_A und P_B sind primitiv (siehe [5, S. 52]), und das Gleiche gilt auch für deren konvexe Kombination $P(\lambda) = \lambda P_A + (1 - \lambda) P_B$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Daher konvergiert jede PB-Matrix gegen eine Matrix, deren Zeilen aus den entsprechenden Perron-Eigenvektoren bestehen. Bezeichnen wir die Perron-Eigenvektoren für P_A , P_B und $\lambda P_A + (1 - \lambda) P_B$ mit π_A , π_B bzw. $\pi(\lambda)$. Aufgrund

$$\pi_A = \pi(\lambda), \quad x_A = x(\lambda) \quad \text{für } \lambda = 1$$

und

$$\pi_B = \pi(\lambda), \quad x_B = x(\lambda) \quad \text{für } \lambda = 0$$

berechnen wir zuerst $\langle \pi(\lambda), x(\lambda) \rangle$ zur Bestimmung der asymptotischen Gewinnerwartung in jedem Spiel. Für $\pi(\lambda) = (\pi(\lambda)_0, \dots, \pi(\lambda)_{M-1})$ mit $M = 3$ gilt²

$$\begin{aligned} \pi(\lambda)_0 &= \frac{1 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_2) + (\lambda p - (1 - \lambda) p_2)^2}{3 + (\lambda p - (1 - \lambda) p_2)^2 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_1) - 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2) + 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2)(\lambda p - (1 - \lambda) p_1)}, \\ \pi(\lambda)_1 &= \frac{1 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_2) + (\lambda p - (1 - \lambda) p_1)(\lambda p - (1 - \lambda) p_2)}{3 + (\lambda p - (1 - \lambda) p_2)^2 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_1) - 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2) + 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2)(\lambda p - (1 - \lambda) p_1)}, \\ \pi(\lambda)_2 &= \frac{1 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_1) + (\lambda p - (1 - \lambda) p_1)(\lambda p - (1 - \lambda) p_2)}{3 + (\lambda p - (1 - \lambda) p_2)^2 - (\lambda p - (1 - \lambda) p_1) - 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2) + 2(\lambda p - (1 - \lambda) p_2)(\lambda p - (1 - \lambda) p_1)}. \end{aligned}$$

Mit den für das Original-Beispiel gewählten Werten $p = 1/2 - \epsilon$, $p_1 = 1/10 - \epsilon$, $p_2 = 3/4 - \epsilon$ gemäß (2.1) erhält man für $\epsilon = 1/1000$

$$\langle \pi_A, x_A \rangle = \langle \pi(1), x(1) \rangle = -\frac{1}{500} < 0$$

²Die in dieser Arbeit vorkommenden Perron-Eigenvektoren wurden mithilfe von Satz 2.7.4 und dem Computeralgebrasystem Maple berechnet. Vgl. S. 24 ff.

und

$$\langle \pi_B, x_B \rangle = \langle \pi(0), x(0) \rangle = -\frac{612401}{352050500} < 0$$

während

$$\langle \pi(1/2), x(1/2) \rangle = \frac{811821}{34617625} > 0.$$

Hieraus erkennt man, dass die Spiele (P_A, x_A) , (P_B, x_B) jeweils Verlustspiele sind, aber ihre Konvexkombination $(P(\lambda), x(\lambda))$ für $\lambda = 1/2$ ein Gewinnspiel ist.

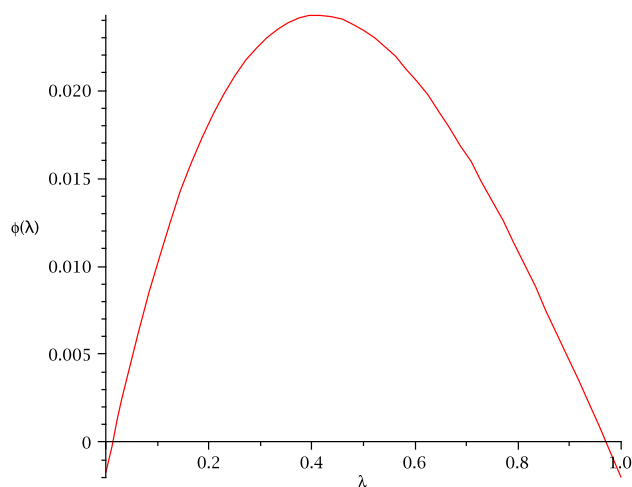


Abbildung 2.5 – Der Graph von $\phi(\lambda) := \langle \pi(\lambda), x(\lambda) \rangle$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ für das Original-Beispiel von Parrondo.

Definition 2.6.1. Seien P_1, \dots, P_r primitive stochastische $(n \times n)$ Matrizen sowie $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ Gewinnvektoren. Für die hierdurch bestimmten Spiele $(P_1, x_1), \dots, (P_r, x_r)$ liegt eine *paradoxe Situation* vor, falls entweder

- (P_k, x_k) kein Gewinnspiel für $1 \leq k \leq r$ und $(P(\lambda), x(\lambda))$ Gewinnspiel ist für einen stochastischen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^r$.

oder

- (P_k, x_k) kein Verlustspiel für $1 \leq k \leq r$ und $(P(\lambda), x(\lambda))$ Verlustspiel ist für einen stochastischen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^r$.

Bei seiner Untersuchung konvexer Kombinationen von PB-Spielen durch Computersimulationen fiel Behrends in [1] auf, dass in der Regel jede Kombination zweier fairer Spiele entweder Gewinn-, Verlust- oder faires Spiel ist; nur für wenige Spiele war die Konvexkombination für unterschiedliche Mischungsparameter sowohl Gewinn- als auch Verlustspiel.

Im Folgenden werden wir dieses Phänomen mathematisch untersuchen. Dafür ist es naheliegend, die asymptotische Gewinnerwartung von PB-Spielen als eine Funktion in Abhängigkeit von ihrem Mischungsparameter λ zu betrachten.

Definition 2.6.2. Seien $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ PB-Matrizen, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$ Gewinnvektoren. Für die hierdurch bestimmten Spiele $(P_1, x_1), \dots, (P_r, x_r)$ sei durch

$$\phi(\lambda) := \langle \pi(\lambda), x(\lambda) \rangle$$

die asymptotische Gewinnerwartung einer Konvexkombination dieser Spiele definiert, wobei λ ein stochastischer Vektor in \mathbb{R}^n und $\pi(\lambda)$ der Perron-Eigenvektor von $P(\lambda)$ ist.

Bemerkung. Mithilfe von ϕ lässt sich Definition 2.6.1 wie folgend umformulieren: Für PB-Spiele $(P_1, x_1), \dots, (P_r, x_r)$ liegt eine paradoxe Situation vor, falls es einen stochastischen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^r$ gibt, so dass gilt:

Entweder

$$\langle \pi_k, x_k \rangle \leq 0, \quad k = 1, \dots, r \quad \text{und} \quad \phi(\lambda) > 0$$

oder

$$\langle \pi_k, x_k \rangle \geq 0, \quad k = 1, \dots, r \quad \text{und} \quad \phi(\lambda) < 0,$$

wobei $\pi(\lambda)$ und π_k die Perron-Eigenvektoren von $P(\lambda)$ bzw. P_k bezeichnen.

Zusätzlich zu der Beobachtung von Behrends stellte Groeber in [5] fest, dass der Graph der ϕ -Funktion zweier PB-Spiele in den meisten Situationen konkav oder konvex ist, wie im Falle von Parrondos Original-Beispiel (Abb. 2.5). Ihm zufolge gibt es aber weiterhin auch Fälle, in denen die ϕ -Funktion weder konkav noch konvex ist. Für die ϕ -Funktion von zwei fairen PB-Spielen bedeutet dieser Fall inhaltlich, dass unter den konvexen Kombinationen dieser Spiele sowohl Gewinn- als auch Verlustspiele sind. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel aus [5, S. 47]:

Beispiel 2.6.3. Betrachten wir die Spiele $(P_1, x_1), (P_2, x_2)$ mit

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \left(0, 1, -\frac{10}{9} \right)$$

und

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \left(1, 0, -\frac{9}{10} \right)$$

Es ist

$$\pi_{P_1} = \left(\frac{9}{104}, \frac{25}{52}, \frac{45}{104} \right), \quad \pi_{P_2} = \left(\frac{9}{44}, \frac{25}{44}, \frac{5}{22} \right)$$

und damit $\phi(0) = 0 = \phi(1)$, d. h. (P_1, x_1) und (P_2, x_2) sind faire Spiele.

Für $\lambda_1 = 0.5$ und $\lambda_2 = 0.9$ gilt nun

$$\pi(\lambda_1) = \left(\frac{13}{73}, \frac{400}{803}, \frac{260}{803} \right), \quad \pi(\lambda_2) = \left(\frac{459}{4159}, \frac{2000}{4159}, \frac{1700}{4159} \right)$$

und damit $\phi(\lambda_1) = \frac{181}{14454} > 0$, aber $\phi(\lambda_2) = -\frac{71}{41590} < 0$.

So ist $(P(\lambda), x(\lambda))$ für $\lambda = \lambda_1$ ein Gewinnspiel und für $\lambda = \lambda_2$ ein Verlustspiel.

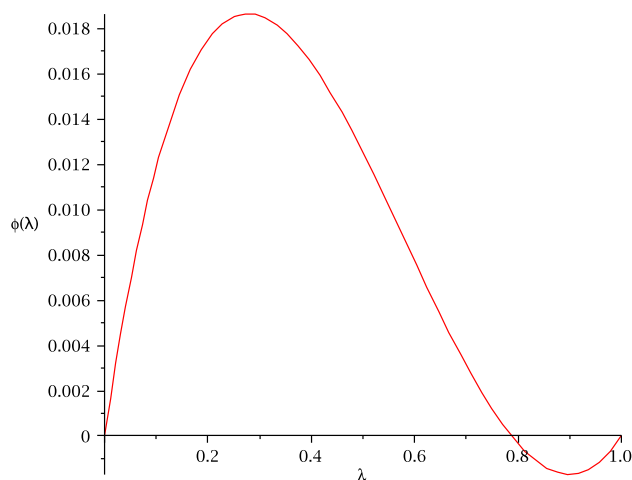


Abbildung 2.6 – Verlauf von ϕ aus Beispiel 2.6.3

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die ϕ -Funktion in Abhängigkeit von den Ausgangsspielen verhält, z. B. wann ϕ konvex bzw. konkav ist, und wann diese eine weitere Nullstelle besitzt, falls die Ausgangsspiele fair sind. Dies führt weiterhin zur Frage nach der Differenzierbarkeit der Abbildung $\pi(\lambda)$, des Perron-Eigenvektors der Konvexkombination von PB-Spielen. Im Idealfall möchte man sogar die Abbildungsvorschrift von $\pi(\lambda)$ kennen, denn dadurch werden die obigen Fragen vollständig beantwortet.

Bezüglich dieser Fragen wurde in [5] eine explizite Funktionsvorschrift von ϕ für zwei (2×2) PB-Matrizen berechnet. Sowohl [1] als auch [5] konnte aber nicht beantworten, wie sich die ϕ -Funktionen für PB-Matrizen beliebiger Größe berechnen lassen.

Diesen offenen Fragen aus [1] und [5] werden wir im nächsten Abschnitt nachgehen. Wir werden feststellen, dass $\pi(\lambda)$ für zwei PB-Spiele eine rationale Funktion ist, deren Nenner auf $[0, 1]$ nicht Null ist. Darüber hinaus werden wir erfahren, dass die Perron-Frobenius Theorie hier erneut eine gewichtige Rolle spielt.

2.7 Eine zentrale Formel

In diesem Abschnitt wird mit Satz 2.7.4 eine zentrale Formel bezüglich der Parrondo-Behrends-Spiele vorgestellt. Zunächst werden Begriffe aus der linearen Algebra wiederholt, die für den Beweis von Satz 2.7.4 notwendig sind.

Definition 2.7.1. Es sei eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Sei ferner eine $(n \times n)$ Matrix A_{ij} dadurch erklärt, dass man alle Elemente a_{i1}, \dots, a_{in} der i -ten Zeile und alle Elemente a_{1j}, \dots, a_{nj} der j -ten Spalte von A durch 0 ersetzt, bis auf das Element a_{ij} im Schnittpunkt von i -ter Zeile und j -ter Spalte, welches man zu 1 abändert, also:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Dann heißt

$$\tilde{a}_{ij} = \det A_{ij}$$

der *Cofaktor* von A zum Indexpaar (i, j) . Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i,j}$ heißt die *Matrix der Cofaktoren* von A , und

$$A^{\text{ad}} := \tilde{A}^T = (\tilde{a}_{ji})_{i,j}$$

die zu A *adjungierte* Matrix.

Lemma 2.7.2. Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und sei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Dann gilt

$$A^{\text{ad}} \cdot A = A \cdot A^{\text{ad}} = (\det A) \cdot I.$$

Beweis. Siehe [2, S.152] □

Lemma 2.7.3. Es seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ \mathbb{R} -lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen. Dann gilt

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \text{rg}(g \circ f) + \dim V_2.$$

Beweis. Wir zeigen, dass

$$\dim \ker(g \circ f) - \dim \ker(f) - \dim \ker(g) \leq 0, \quad (2.7)$$

denn daraus folgt aufgrund der Rangformel

$$\begin{aligned} 0 &\geq \dim \ker(g \circ f) - \dim \ker(f) - \dim \ker(g) \\ &= (\dim V_1 - \text{rg}(g \circ f)) - (\dim V_1 - \text{rg}(f)) - (\dim V_2 - \text{rg}(g)) \\ &= -\text{rg}(g \circ f) - \dim V_2 + \text{rg}(f) + \text{rg}(g). \end{aligned}$$

Für den Beweis der Ungleichung (2.7) sei $\dim \ker f = k$. Offenbar ist $\ker f \subset \ker g \circ f$ und daher existiert ein $r \geq 0$, so dass $\dim \ker g \circ f = k + r$.

Sei nun v_1, \dots, v_k eine Basis von $\ker f$. Ergänzen wir sie zu einer Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+r}$ von $\ker g \circ f$. Wir behaupten, dass $f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+r})$ linear unabhängig sind. Angenommen, sie sind nicht linear unabhängig, dann existieren $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, r$ mit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \neq (0, \dots, 0)$, so dass

$$0 = \alpha_1 f(v_{k+1}) + \alpha_2 f(v_{k+2}) + \dots + \alpha_r f(v_{k+r}).$$

Aus Linearität von f folgt

$$0 = f(\alpha_1 v_{k+1} + \alpha_2 v_{k+2} + \dots + \alpha_r v_{k+r})$$

und daher

$$\alpha_1 v_{k+1} + \alpha_2 v_{k+2} + \dots + \alpha_r v_{k+r} \in \ker f = \text{span}(v_1, \dots, v_k),$$

was der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+r}$ widerspricht.

Wegen $f(v_{k+1}), \dots, f(v_{k+r}) \in \ker g$ ist $\dim \ker g \geq r$ und damit ist

$$\begin{aligned} \dim \ker g \circ f &= r + k \\ &\leq \dim \ker g + \dim \ker f. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz aus [17, S. 66] hat eine zentrale Stellung in dieser Arbeit. Dieser ermöglicht uns nämlich, die innere Struktur der Parrondo-Behrends-Spiele zu erschließen, der wir uns im nächsten Kapitel weiter widmen werden.

Satz 2.7.4. *Sei P eine primitive stochastische Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt für ihren Perron-Eigenvektor π*

$$\pi = \frac{1}{D} \text{diag}((I - P)^{ad}),$$

wobei $\text{diag} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung ist, die die Diagonalelemente einer Matrix liefert, d. h.

$$\text{diag}((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) := (a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

und D die Summe der Elemente aus $\text{diag}((I - P)^{ad})$ ist, d. h.

$$D := \sum_{k=1}^n [\text{diag}((I - P)^{ad})]_k.$$

Beweis. Setze $A = I - P$. Aus $\pi P = \pi$ folgt $\pi A = 0$, also ist $\det A = 0$ und es gilt nach Lemma 2.7.2

$$A \cdot A^{\text{ad}} = A^{\text{ad}} \cdot A = \det A \cdot I = 0. \quad (2.8)$$

Nach Satz 2.3.2 und 2.3.4 ist der Eigenraum von P zum Eigenwert 1 eindimensional und daher

$$\dim \ker A = \dim \ker(I - P) = 1. \quad (2.9)$$

So folgt aus der Rangformel $\text{rg}(A) = n - 1$. Daher existiert ein Indexpaar, zu dem der Cofaktor von A nicht Null ist und somit $\text{rg}(A^{\text{ad}}) \geq 1$. Außerdem gilt nach Lemma 2.7.3

$$\text{rg}(A^{\text{ad}}) \leq \text{rg}(A \cdot A^{\text{ad}}) + n - \text{rg}(A) = 1,$$

also $\text{rg}(A^{\text{ad}}) = 1$.

Da die Matrix P stochastisch ist, gilt für $e = [1, \dots, 1]^T$

$$Ae = (I - P)e = 0.$$

So ist e wegen (2.9) eine Basis von $\ker A$, und aus (2.8) folgt, dass jede Spalte von A^{ad} ein Vielfaches von e ist. Damit ist $A^{\text{ad}} = ew$ für $w = \text{diag}(A^{\text{ad}})$.

Aus $A^{\text{ad}} \cdot A = 0$ und $\pi A = 0$ folgt, dass jede Zeile in A^{ad} ein Vielfaches von π ist und so ist $w = \alpha\pi$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dieser Skala α kann nicht Null sein, da sonst $A^{\text{ad}} = 0$ wäre. Folglich ist $D := we = \alpha\pi e = \alpha \neq 0$ und

$$\frac{1}{D} \text{diag}(A^{\text{ad}}) = w/D = \pi.$$

□

Korollar 2.7.5. *Es seien P_1 und P_2 ($n \times n$) PB-Matrizen. Dann ist der Perron-Eigenvektor ihrer Konvexkombination $P(\lambda)$ definiert durch*

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \text{diag}((I - P(\lambda))^{\text{ad}}).$$

mit $D(\lambda) := \sum_{k=1}^n [\text{diag}((I - P(\lambda))^{\text{ad}})]_k$. Jede Vektorkomponente von $\pi(\lambda)$ ist als eine Abbildung in Abhängigkeit von λ eine rationale Funktion, deren Nenner auf dem Einheitsintervall nicht Null ist.

Beweis. Da die Cofaktoren als Determinante eine Summe aus den Produkten der Matrizenelemente der Matrix $I - P(\lambda)$ sind, ist zunächst jede Vektorkomponente von $\text{diag}((I - P(\lambda))^{\text{ad}})$ sowie $D(\lambda)$ ein Polynom in λ über \mathbb{R} . Nach Satz 2.7.4 ist außerdem $\pi(\lambda)$ stets ein positiver Zeilenvektor für $0 \leq \lambda \leq 1$ und damit ist jede Vektorkomponente von $\pi(\lambda)$ eine rationale Funktion, deren Nenner auf dem Einheitsintervall nicht Null ist. □

Mit dem obigen Korollar lässt sich nun der Perron-Eigenvektor einer Konvexkombination von PB-Matrizen explizit berechnen und dadurch auch die asymptotische Gewinnwahrscheinlichkeit der kombinierten PB-Spiele ermitteln. So wurde beispielsweise in Abschnitt 2.6 mit einem Computeralgebrasystem (cf. Anhang) der Perron-Eigenvektor der Konvexkombination der PB-Spiele im Parrondos Original-Beispiel berechnet.

Wegen $\phi(\lambda) = \langle \pi(\lambda), x(\lambda) \rangle$ ist auch der Aufbau von ϕ fortan bekannt:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \langle \text{diag}((I - P(\lambda))^{\text{ad}}), x(\lambda) \rangle.$$

Kommen wir nun zurück auf die Beobachtungen von Behrends und Groeber, wonach paradoxe Situationen bei der Kombinationen von PB-Spielen eher die Regel sind als die Ausnahme. Diese Beobachtung kann dadurch erklärt werden, dass die ϕ -Funktion eine rationale Funktion auf dem Einheitsintervall ist, die nicht *notwendigerweise* konstant sein muss.

An dieser Stelle liegt die Vermutung nahe, dass für die Konvexkombination von zwei nichtidentischen fairen Spielen immer eine paradoxe Situation existiert. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass dies nicht der Fall ist.

Beispiel 2.7.6. Betrachten wir zwei PB-Spiele $(P_1, x_1), (P_2, x_2)$ mit den PB-Matrizen aus dem Original-Beispiel von Parrondo

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

und Gewinnvektoren

$$x_1 = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad x_2 = \left(1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right).$$

Der Perron-Eigenvektor für $P(\lambda)$ lautet

$$\pi(\lambda) = \left(-5 \frac{13 + \lambda^2 - 2\lambda}{-169 + 11\lambda^2 - 22\lambda}, 2 \frac{-13 + 4\lambda^2 - 21\lambda}{-169 + 11\lambda^2 - 22\lambda}, 2 \frac{-39 + 4\lambda^2 + 5\lambda}{-169 + 11\lambda^2 - 22\lambda}\right)$$

und direkt ausgerechnet ist

$$\phi(\lambda) = \langle \pi(\lambda), x(\lambda) \rangle = 0$$

Wir haben somit zwei nichtidentischen PB-Spiele $(P_1, x_1), (P_2, x_2)$, deren ϕ -Funktion auf $[0, 1]$ konstant Null ist.

Kann man sicher stellen, dass zu jedem gegebenen fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel existiert, so dass für diese Spiele eine paradoxe Situation vorliegt, auch wenn sich ein Paar von nichtidentischen fairen PB-Spielen nicht

immer zu einem Gewinn- bzw. Verlustspiel kombinieren lässt? Aus Anwendersicht wäre es durchaus interessant, wenn man stets aus einem fairen Spiel ein Gewinnspiel erzeugen kann, indem man sich ein weiteres faires Spiel aussucht.

Das nächste Kapitel ist dieser Frage gewidmet. Wir werden sehen, dass man für ein gegebenes faires PB-Spiel immer eine paradoxe Situation herstellen kann.

Kapitel 3

Analyse der Parrondo-Behrends-Spiele

In diesem Kapitel wird die Gesamtheit der fairen PB-Spiele auf ihre geometrische Eigenschaft mathematisch untersucht. Als Ergebnis erhalten wir, dass paradoxe Situationen bei den PB-Spielen, wie von Behrends und Groeber vermutet, nicht außergewöhnlich sind.

Als Ansatzpunkt diente die Arbeit von Costa et. al. [3], die wir im ersten Abschnitt vorstellen.

Im zweiten Abschnitt werden PB-Spiele analysiert. Es wird gezeigt, dass zu jedem fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel existiert, so dass für diese Spiele eine paradoxe Situation vorliegt.

3.1 Parrondos Paradox ist überall

Costa et. al. betrachtet in [3] das Spiel A von Parrondos Original-Beispiel als eine Variante von Spiel B mit $p_1 = p_2 = p$. (cf. Abschnitt 2.6). So kann man die Konvexkombination der beiden Spiele wiederum als eine andere Parametrisierung von Spiel B mit den Parametern $q_1 = \lambda p + (1 - \lambda)p_1$ und $q_2 = \lambda p + (1 - \lambda)p_2$ betrachten. Damit sind alle drei Spiele vom Spieltyp B , nur mit unterschiedlichen Parametern.

Dies veranlasst uns, die Regionen des Parameterraums von Spiel B zu untersuchen, in denen Spiel B ein Gewinn- oder Verlustspiel bzw. ein faires Spiel ist. Nach der Formulierung im Abschnitt 2.5 ist Spiel (P_B, x_B) mit Parametrisierung (p_1, p_2) ein

- Gewinnspiel, falls $\langle \pi_B, x_B \rangle > 0$,
- faires Spiel, falls $\langle \pi_B, x_B \rangle = 0$,

- Verlustspiel, falls $\langle \pi_B, x_B \rangle < 0$,

wobei für $M = 3$ gilt

$$\langle \pi_B, x_B \rangle = \frac{p_1 p_2^2 - (1 - p_1)(1 - p_2)^2}{2 - p_1 + 2p_1 p_2 + (p_2 - 1)^2}. \quad (3.1)$$

Da der Nenner von (3.1) für $p_1, p_2 \in (0, 1)$ stets positiv ist, hängt das Vorzeichen des Bruches nur vom Zähler ab. Damit ist Spiel B genau dann ein Gewinnspiel, Verlustspiel bzw. faires Spiel, wenn $p_1 p_2^2 - (1 - p_1)(1 - p_2)^2$ positiv, negativ bzw. Null ist. Diese drei Regionen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Punkt (p, p) entspricht dabei den Parametern von Spiel A , und (p_1, p_2) den Parametern von Spiel B . Die Punkte $(\lambda p + (1 - \lambda)p_1, \lambda p + (1 - \lambda)p_2)$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ entsprechen den Parametern der Konvexkombination von Spiel A und Spiel B . Es ist zu erkennen, dass für $\lambda = \frac{1}{2}$ die Konvexkombination oberhalb der Kurve liegt und somit ein Gewinnspiel darstellt, obwohl Spiel A und Spiel B jeweils Verlustspiele sind und ihre Parameter daher unterhalb der Kurve liegen.

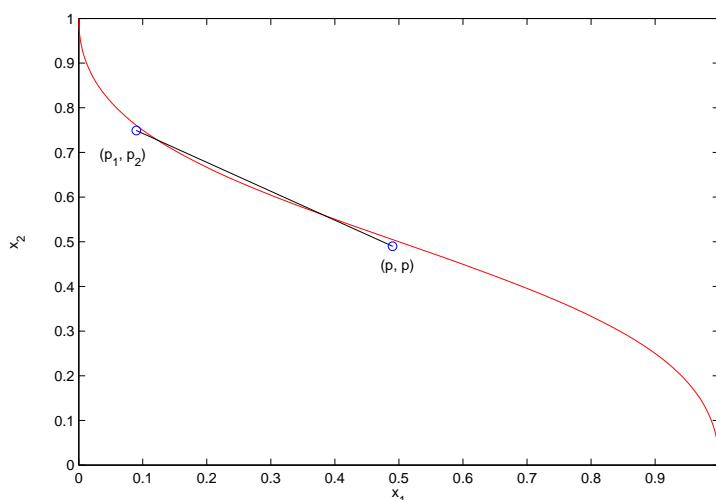


Abbildung 3.1 – Graphische Darstellung der Nullstellenmenge von $x_1 x_2^2 - (1 - x_1)(1 - x_2)^2$. Punkte, die auf der Kurve liegen, entsprechen den Parametern der fairen Spiele vom Spieltyp B . Die Punkte oberhalb bzw. unterhalb der Kurve entsprechen Parametrisierungen für Gewinn- bzw. Verlustspiele. Die Linie, die die Punkte (p_1, p_2) und (p, p) verbindet, entspricht der Konvexkombination der beiden Punkte.

Nun ist es möglich, die „Allgegenwärtigkeit“ des Parrondos Paradoxons zu zeigen: man wählt sich lediglich zwei Parameter aus dem Verlustbereich des Parameterraums, deren Verbindungsstrecke den Gewinnbereich überschneidet.

Dass eine solche Strecke für zwei beliebige Punkte immer gefunden werden kann, ist offenbar nicht gesichert. Die Punkte müssen sich nämlich möglichst

nah an der Kurve befinden, so dass ihre Verbindungsstrecke die Kurve schneiden kann. Dies erklärt auch, dass der Verzerrungsparameter ϵ in Parrondos Original-Beispiel hinreichend klein gewählt werden musste, damit das Paradox entsteht (cf. Abschnitt 2.1).

Dennoch lässt sich für die Parametrisierung eines fairen Spiels immer eine Parametrisierung eines weiteren fairen Spiels finden, so dass ihre Verbindungsstrecke den Gewinnbereich und/oder den Verlustbereich überschneidet. Die Auflösung von $p_1 p_2^2 - (1 - p_1)(1 - p_2)^2 = 0$ nach p_1 liefert nämlich die Gleichung

$$p_1 = \frac{(1 - p_2)^2}{p_2^2 + (1 - p_2)^2},$$

deren rechter Ausdruck in Abhängigkeit von p_2 eine nichtlineare rationale Funktion auf dem Intervall $(0, 1)$ darstellt. Da die Ableitung der Funktion

$$\frac{dp_1}{dp_2} = \frac{2(p_2 - 1)p_2}{(2p_2^2 - 2p_2 + 1)^2}$$

nicht konstant ist, stimmt die Funktion auf keinem Intervall in $(0, 1)$ mit einer Geraden überein.

Die obige Betrachtungsweise führt dazu, für eine weitere Analyse nicht nur die Spiele vom Spieltyp B , sondern sämtliche PB-Spiele aus geometrischer Sicht zu betrachten.

3.2 Analyse

In diesem Abschnitt wird allgemein begründet, dass zu *jedem* fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel existiert, so dass für diese Spiele eine paradoxe Situation vorliegt. Dabei kann das letztere PB-Spiel sogar so gewählt werden, dass der Abstand zwischen den Parameterwerten des ersten und des zweiten PB-Spiels beliebig klein ist. Dies besagt, dass man durch eine beliebig kleine Veränderung von Parameterwerten des Ausgangsspiels schon eine paradoxe Situation erzielen kann. Für die Analyse der oben genannten Eigenschaft der PB-Spiele wird das Problem aus dem Feld positiver dynamischer Systeme auf das Gebiet der reellen algebraischen Geometrie verschoben. Das folgende Beispiel gibt einen Einblick in die Vorgehensweise der Analyse.

Beispiel 3.2.1. Betrachten wir ein parametrisiertes PB-Spiel $(Q(w_1, w_2), x)$ mit

$$Q(w_1, w_2) := \begin{bmatrix} 1 - w_1 & w_1 \\ 1 - w_2 & w_2 \end{bmatrix}, \quad x := (x_1, x_2), \quad w_1, w_2 \in (0, 1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Zu jeder positiven stochastischen (2×2) Matrix gibt es genau ein Paar $(w_1, w_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$, so dass diese Matrix durch $Q(w_1, w_2)$ dargestellt werden kann (vgl. Satz 3.2.8). So steht die Menge $(0, 1) \times (0, 1) \times \mathbb{R}^2$ in eins-zu-eins Korrespondenz

mit PB-Spielen, die aus einer positiven (2×2) PB-Matrix und einem Gewinnvektor in \mathbb{R}^2 bestehen.

Nach Definition 2.5.2 auf S. 17 ist das Spiel $(Q(w_1, w_2), x)$ genau dann fair, wenn $\langle \pi_{Q(w_1, w_2)}, x \rangle = 0$ ist, wobei $\pi_{Q(w_1, w_2)}$ den Perron-Eigenvektor von $Q(w_1, w_2)$ bezeichnet. Aus Satz 2.7.4 auf S. 24 folgt außerdem:

$$\pi_{Q(w_1, w_2)} = \frac{1}{D} \text{diag}((I - Q(w_1, w_2))^{\text{ad}}) \quad \text{mit } D \neq 0.$$

Damit ist $\langle \pi_{Q(w_1, w_2)}, x \rangle = 0$ gleichbedeutend mit $\langle \text{diag}((I - Q(w_1, w_2))^{\text{ad}}, x) \rangle = 0$. Da aber die Cofaktoren von $I - Q(w_1, w_2)$ als Determinanten Polynome in w_1, w_2 sind, ist der Ausdruck $\langle \text{diag}((I - Q(w_1, w_2))^{\text{ad}}, x) \rangle$ ein Polynom in w_1, w_2, x_1, x_2 . Die Nullstellenmenge dieses Polynoms eingeschränkt auf $(0, 1) \times (0, 1) \times \mathbb{R}^2$ repräsentiert damit alle durch $(Q(w_1, w_2), x)$ darstellbaren *fairen* PB-Spiele. Ist diese Nullstellenmenge eine 3-dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^4 , so wird die Untersuchung auf ein paradoxes Verhalten zweier PB-Spiele auf die Untersuchung zweier Punkte auf dieser Untermannigfaltigkeit verschoben: Ist nämlich die Verbindungsstrecke beider Punkte, also die Konvexkombinationen der Punkte, nicht vollständig in der Untermannigfaltigkeit enthalten, so gibt es einen Punkt auf der Verbindungslinie, der ein nicht-faires PB-Spiel definiert; d. h., es lässt sich eine paradoxe Situation für die durch diese Punkte dargestellten PB-Spiele konstruieren.

Um die Nullstellenmenge der fairen Spiele in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem zu veranschaulichen, betrachten wir die folgende, um einen Parameter reduzierte Parameterdarstellung $(Q(w_1), x_1, x_2)$ eines PB-Spiels mit

$$Q(w_1) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - w_1 & w_1 \end{bmatrix}, \quad x := (x_1, x_2), \quad w_1 \in (0, 1), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Nach vorhergehenden Erklärungen ist $(Q(w_1), x_1, x_2)$ genau dann ein faires Spiel, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \text{diag}((I - Q(w_1))^{\text{ad}}, x) \rangle \\ &= (1 - w_1)x_1 + x_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Nullstellenmenge des Polynoms in (3.2) ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 (vgl. Lemma 3.2.25). Sie ist in Abbildung 3.2 illustriert. Neben der Nullstellenmenge ist die Verbindungslinie der Punkte $(1/10, -3/5, 27/50)$ und $(3/4, 4/5, -3/20)$ aufgezeichnet. Sie ist nicht in der Nullstellenmenge enthalten und es gibt somit eine Konvexkombination der beiden Punkte, die ein nicht faires PB-Spiel definiert.

Dass die durch die Punkte $(1/10, -3/5, 27/50)$ und $(3/4, 4/5, -3/20)$ definierten PB-Spiele zu einem nicht-fairen PB-Spiel kombiniert werden können, lässt sich auch anhand ihrer ϕ -Funktion nachweisen. Diese ist nämlich

$$\phi(\lambda) = \frac{-189\lambda^2 + 189\lambda}{140\lambda + 240}.$$

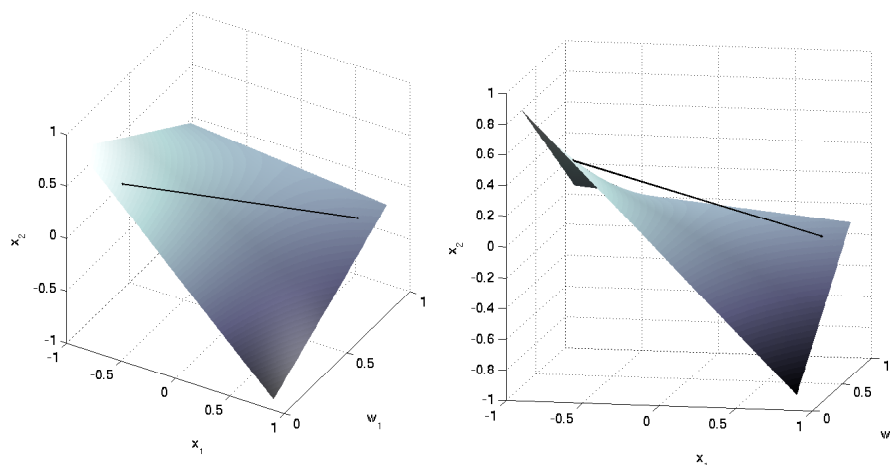


Abbildung 3.2 – Nullstellenmenge von $(1 - w_1)x_1 + x_2$ eingeschränkt auf $\{(w_1, x_1, x_2) \mid w_1, x_1, x_2 \in (0, 1)\}$ aus zwei verschiedenen Perspektiven. Die Verbindungsstrecke der Punkte $(1/10, -3/5, 27/50)$ und $(3/4, 4/5, -3/20)$ in der Nullstellenmenge ist auch dargestellt. Aus dem rechten Bild ist zu erkennen, dass die Verbindungsstrecke der Punkte nicht in der Nullstellenmenge enthalten ist. Somit liegt für die durch die Punkte $(1/10, -3/5, 27/50)$ und $(3/4, 4/5, -3/20)$ definierten PB-Spiele eine paradoxe Situation vor.

Da der Nenner für $\lambda \in (0, 1)$ nicht Null und der Zähler eine Parabel mit Nullstellen für $\lambda = 0$ bzw. 1 , und Maximum bei $\lambda = 1/2$ ist, ist jede Konvexkombination obiger PB-Spiele ein Gewinnspiel.

Man beachte, dass in diesem Abschnitt die Buchstaben mit tiefgestellten Indizes je nach Situation Vektoren einer Teilmenge von \mathbb{R}^n oder Komponenten eines Vektors darstellen. Außerdem bezeichne $\mathbb{R}_0^k \subset \mathbb{R}^n$ den k -dimensionalen Unterraum

$$\mathbb{R}_0^k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n - 1$$

und $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ die offene Kugel in \mathbb{R}^n mit Mittelpunkt $a \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|a - x\|_1 < r\}.$$

Im letzten Abschnitt haben wir Spiele vom Spieltyp B betrachtet, d. h. Spiele die im Unterschied zu Spiel B andere Parameterwerte besitzen. Im Folgenden wird der Begriff *Spieltyp* für PB-Spiele formuliert.

Definition 3.2.2. Sei $\Gamma = (\gamma_{ij})$ eine $(n \times n)$ Matrix. Γ heißt $(n \times n)$ *Spieltyp*, falls $\Gamma \in \{0, 1\}^{n \times n}$ und zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so

dass $\gamma_{ij} = 1$. Eine stochastische $(n \times n)$ Matrix $A = (a_{ij})$ bzw. ein PB-Spiel (A, x) , $x \in \mathbb{R}^n$ heißt vom Spieltyp Γ , wenn

$$a_{ij} > 0 \iff \gamma_{ij} = 1.$$

Beispiel 3.2.3. Die Matrizen

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sind Spieltypen.

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ist dann vom Spieltyp Γ_1 und die PB-Matrizen P_A und P_B aus dem Parrondos Original-Beispiel sind vom Spieltyp Γ_2 .

Definition 3.2.4. Eine binäre Relation $R \subset M \times M$ auf einer Menge M heißt *strenge Totalordnung*, falls R transitiv und trichotomisch ist. Eine binäre Relation $R \subset M \times M$ heißt dabei *trichotomisch*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\text{Entweder } (x, y) \in R, \quad x = y \quad \text{oder} \quad (y, x) \in R.$$

Bemerkung. Zu jeder k -elementigen Menge M ($k \in \mathbb{N}$), versehen mit einer strengen Totalordnung R , gibt es genau eine Nummerierung $M = \{m_1, \dots, m_k\}$, so dass $(m_i, m_j) \in R$ mit $i < j$ äquivalent ist für $i, j = 1, \dots, k$.

Seien $M, N \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ zwei endliche Mengen. Eine Relation \prec auf $D \subset M \times N$ heißt *lexikographische Ordnung* auf D , falls für alle $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in D$ gilt:

$$(i_1, j_1) \prec (i_2, j_2) \iff i_1 < i_2 \quad \text{oder} \quad i_1 = i_2 \quad \text{und} \quad j_1 < j_2.$$

Es ist leicht nachzuweisen, dass diese transitiv und trichotomisch ist. Damit ist \prec eine strenge Totalordnung auf D und nach vorhergehender Bemerkung können wir die folgende bijektive Abbildung definieren:

$$\begin{aligned} \rho : D &\longrightarrow \{1, 2, \dots, r\} && \text{mit } r = \#(M \times N) \\ (i, j) &\longmapsto 1 + \#\{(k, l) \in D \mid (k, l) \prec (i, j)\}, \end{aligned}$$

die die Elemente aus D nach der Reihenfolge bezüglich \prec nummeriert.

Beispiel 3.2.5. Sei $D = \{2, 3\} \times \{1, 2, 4\}$. Es gilt dann

$$(2, 1) \prec (2, 2) \prec (2, 4) \prec (3, 1) \prec (3, 2) \prec (3, 4)$$

und damit

$$\rho(2, 1) = 1, \rho(2, 2) = 2, \rho(2, 4) = 3, \rho(3, 1) = 4, \rho(3, 2) = 5, \rho(3, 4) = 6.$$

Wir möchten nun die Abbildung Q_Γ zu einem $(n \times n)$ Spieltyp Γ definieren. Dazu sei $m_i(\Gamma) := \min\{j \in \{1, \dots, n\} \mid \gamma_{ij} = 1\}$ der kleinste Spaltenindex für einen gegebenen Zeilenindex i , bei dem der Matrixeintrag „Eins“ ist und

$$A_i(\Gamma) = \{(i, j) \mid \gamma_{ij} = 1, j \neq m_i(\Gamma), j \in \{1, \dots, n\}\}$$

die Menge der Indizes in der i -ten Zeile von Γ , bei denen der Matrixeintrag Eins, aber nicht die erste Eins ist, die in der Zeile vor kommt. Definiere weiterhin $s_i(\Gamma) := \#A_i(\Gamma)$. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts schreiben wir der Einfachheit halber s_i, m_i und A_i anstatt $s_i(\Gamma), m_i(\Gamma)$ bzw. $A_i(\Gamma)$, falls der Spieltyp Γ eindeutig gegeben ist.

Ferner sei $A := \bigcup_i^n A_i$, $s := \sum_{i=1}^n s_i = \#A$ und $\mathcal{B}_\Gamma(n) := \prod_{i=1}^n B_+^{s_i} \subset \mathbb{R}^s$, wobei

$$B_+^k := \{x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^k \mid x_i > 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$$

eine Menge ist, die die Vektoren aus der k -dimensionalen Einheitskugel mit lauter positiven Elementen enthält. Nach Definition sind B_+^k offene Mengen und damit ist $\mathcal{B}_\Gamma(n)$ offen in \mathbb{R}^n .

Definition 3.2.6. Sei ein $(n \times n)$ Spieltyp Γ gegeben und die Abbildung ρ definiert auf der Menge A . Dann ist die Abbildung Q_Γ definiert durch

$$\begin{aligned} Q_\Gamma : \quad \mathcal{B}_\Gamma(n) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ w = (w_1, \dots, w_s) &\longmapsto Q_\Gamma(w) \end{aligned}$$

mit

$$[Q_\Gamma(w)]_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \gamma_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{(\mu, \nu) \in A_i} w_{\rho(\mu, \nu)} & , \text{ falls } j = m_i \\ w_{\rho(i, j)} & , \text{ falls } (i, j) \in A \end{cases} .$$

Beispiel 3.2.7. Es sei ein Spieltyp Γ gegeben durch

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Dann sind

$$m_1 = m_3 = m_4 = 1, \quad m_2 = 2$$

und

$$\Lambda_1 = \{(1, 3), (1, 4)\}, \Lambda_2 = \{(2, 3), (2, 4)\}, \Lambda_3 = \{(3, 2), (3, 3), (3, 4)\}, \Lambda_4 = \emptyset.$$

Für ein $w \in \mathcal{B}_\Gamma(n)$ gilt

$$Q_\Gamma(w) = \begin{bmatrix} 1 - w_1 - w_2 & 0 & w_1 & w_2 \\ 0 & 1 - w_3 - w_4 & w_3 & w_4 \\ 1 - w_5 - w_6 - w_7 & w_5 & w_6 & w_7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Im Folgenden sei ein $(n \times n)$ Spieltyp Γ gegeben. Wir setzen $\mathcal{B} := \mathcal{B}_\Gamma(n)$ und $Q := Q_\Gamma$. Sei \mathcal{C} die Menge aller stochastischen Matrizen vom Spieltyp Γ . Außerdem sei die Abbildung ρ auf Λ definiert. Es ist dabei zu beachten, dass $\rho: \Lambda \rightarrow \{1, \dots, s\}$ bijektiv ist.

Satz 3.2.8. *Die Abbildung Q besitzt folgende Eigenschaften:*

1. Q ist injektiv.
2. $\mathcal{C} = Q(\mathcal{B})$
3. Für alle $v, w \in \mathcal{B}$, $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$Q(\lambda v + (1 - \lambda)w) = \lambda Q(v) + (1 - \lambda)Q(w)$$

Q ist also eine Bijektion zwischen \mathcal{B} und \mathcal{C} , die die Konvexkombination zweier Elemente bewahrt.

Beweis. Ad 1: Sei $Q(w) = Q(v)$ für $w, v \in \mathcal{B}$. Dann ist $[Q(w)]_{ij} = [Q(v)]_{ij}$, $(i, j) \in \Lambda$ und damit $w_{\rho(i,j)} = v_{\rho(i,j)}$, $(i, j) \in \Lambda$, woraus $w_k = v_k$, $k = 1, \dots, s$ folgt.

Ad 2: Wir zeigen zuerst $\mathcal{C} \supset Q(\mathcal{B})$. Sei $w \in \mathcal{B}$. Es ist zu zeigen, dass $Q(w)$ folgende Bedingungen erfüllt:

- $\sum_{j=1}^n [Q(w)]_{ij} = 1$ für $i = 1, \dots, n$
- $[Q(w)]_{ij} \geq 0$ für $i, j = 1, \dots, n$
- $[Q(w)]_{ij} > 0 \iff \gamma_{ij} = 1$, für $i, j = 1, \dots, n$

Es gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n [Q(w)]_{ij} &= [Q(w)]_{i, m_i} + \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\}, \\ j \neq m_i}} [Q(w)]_{ij} \\ &= \left(1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} w_{\rho(\mu, \nu)} \right) + \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} w_{\rho(\mu, \nu)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und die erste Bedingung ist damit erfüllt.

Da $w \in \mathcal{B}$ sind die Komponenten $w_k > 0$ und daher $[Q(w)]_{ij} > 0$ für alle $(i, j) \in \Lambda$. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} [Q(w)]_{i, m_i} &= 1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} w_{\rho(i, j)} \\ &= 1 - \sum_{k \in \rho(\Lambda_i)} w_k \\ &> 0, \end{aligned}$$

denn

$$\rho(\Lambda_i) = \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} s_k + 1, \sum_{k=1}^{i-1} s_k + 2, \dots, \sum_{k=1}^i s_k \right\}$$

und

$$\left(w_{\sum_{k=1}^{i-1} s_k + 1}, w_{\sum_{k=1}^{i-1} s_k + 2}, \dots, w_{\sum_{k=1}^i s_k} \right) \in B_+^{s_i}.$$

Damit sind die letzten beiden Bedingungen erfüllt.

Nun ist zu zeigen, dass $\mathcal{C} \subset Q(\mathcal{B})$. Wähle dafür ein $A = (a_{ij})_{i, j} \in \mathcal{C}$. Da A vom Spieltyp Γ ist, gilt für $i, j = 1, \dots, n$:

$$a_{ij} = 0 \iff \gamma_{ij} = 0.$$

A ist außerdem stochastisch und daher

$$a_{i, m_i} = 1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} a_{\mu\nu} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Setzen wir nun $w_k := a_{\rho^{-1}(k)}$ für alle $k = 1, \dots, s$. Dann ist

$$[Q(w)]_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} a_{\mu\nu} & , \text{ falls } j = m_i \\ a_{ij} & , \text{ falls } (i, j) \in \Lambda \end{cases},$$

also $[Q(w)]_{ij} = a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Ad 3: Es gilt

$$\begin{aligned}
& [Q(\lambda v + (1 - \lambda)w)]_{ij} \\
&= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \gamma_{ij} = 0 \\ 1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} \lambda v_{\rho(\mu, \nu)} + (1 - \lambda)w_{\rho(\mu, \nu)} & , \text{ falls } j = m_i \\ \lambda v_{\rho(i, j)} + (1 - \lambda)w_{\rho(i, j)} & , \text{ falls } (i, j) \in \Lambda \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \gamma_{ij} = 0 \\ \lambda \left(1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} v_{\rho(\mu, \nu)}\right) + (1 - \lambda) \left(1 - \sum_{(\mu, \nu) \in \Lambda_i} w_{\rho(\mu, \nu)}\right), & \text{ falls } j = m_i \\ \lambda v_{\rho(i, j)} + (1 - \lambda)w_{\rho(i, j)} & , \text{ falls } (i, j) \in \Lambda \end{cases} \\
&= \lambda [Q(v)]_{ij} + (1 - \lambda) [Q(w)]_{ij}.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.9. *Ist Γ primitiv, dann ist die Abbildung Q nicht konstant.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass es ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt mit $\Lambda_i \neq \emptyset$, denn dann gibt es ein j mit $[Q(w)]_{ij} = w_{\rho(i, j)}$. Aus Primitivität von Γ folgt zum einen, dass Γ keine Nullzeile bzw. Nullspalte enthält und zum anderen, dass Γ keine Permutationsmatrix ist, denn sonst gibt es für beide Fälle kein k mit $\Gamma^k > 0$. Damit enthält Γ eine Zeile mit mindestens zwei Elementen, woraus unsere Behauptung folgt. □

Sei Γ im weiteren Verlauf dieses Abschnitts primitiv und betrachten wir fortan ausschließlich Matrizen vom Spieltyp Γ . Sei eine Abbildung $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \mapsto \text{diag}((I - A)^{ad})$ erklärt. Da Γ primitiv ist, ordnet die Abbildung τ einer Matrix $A \in \mathcal{C}$ ein Vielfaches von ihrem Perron-Eigenvektor zu (vgl. Satz 2.7.4). Es sei ein PB-Spiel $(Q(w), x)$ vom Spieltyp Γ gegeben mit $w \in \mathcal{B}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Definitionsgemäß ist dieses Spiel genau dann fair, wenn $\langle \tau(Q(w)), x \rangle = 0$. Um zu untersuchen, ob zu jedem fairen PB-Spiel eine paradoxe Situation existiert, analysieren wir die Nullstellenmenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$ der Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(w, x) &\longmapsto \langle \tau(Q(w)), x \rangle.
\end{aligned}$$

Sei $\alpha_i(w)$ der Cofaktor von $I - Q(w)$ zum Indexpaar (i, i) . Da

$$\tau(Q(w)) = \text{diag}(\text{cofac}(I - Q(w))),$$

ist

$$\tau(Q(w)) = (\alpha_1(w), \alpha_2(w), \dots, \alpha_n(w)).$$

und wir erhalten

$$\langle \tau(Q(w)), x \rangle = \alpha_1(w) \cdot x_1 + \alpha_2(w) \cdot x_2 + \dots + \alpha_n(w) \cdot x_n. \quad (3.3)$$

Definition 3.2.10. Ein Monom ist ein Polynom in mehreren Unbekannten, das nur aus einem Term besteht. Ein Monom $c \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r}$ in x_1, \dots, x_r über \mathbb{R} mit $c \neq 0$ heißt quadratfrei, falls $i_k \in \{0, 1\}$ für $k = 1, \dots, r$. Ein Polynom $\sum_{k=1}^m c_k \cdot x_1^{i_{1,k}} x_2^{i_{2,k}} \cdots x_r^{i_{r,k}}$ bestehe aus quadratfreien Monomen, wenn $c_k \cdot x_1^{i_{1,k}} x_2^{i_{2,k}} \cdots x_r^{i_{r,k}}$ quadratfrei ist für jedes $k = 1, \dots, m$ mit $c_k \neq 0$.

Lemma 3.2.11. Sei $\tau(Q(w)) = (\alpha_1(w), \alpha_2(w), \dots, \alpha_n(w))$. Dann ist jedes $\alpha_i(w)$ ein Polynom in w_k , $k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \rho(\Lambda_i)$, dessen Monome quadratfrei sind.

Beweis. Die (i, j) -te Komponente der Matrix $Q(w)$ ist ein Polynom in w_k , $k \in \rho(\Lambda_i)$. Somit ist auch die (i, j) -te Komponente der Matrix $I - Q(w)$ ein Polynom in w_k , $k \in \rho(\Lambda_i)$.

Sei $(I - Q(w))_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die dadurch erklärt ist, dass man die Elemente der i -ten Zeile und i -ten Spalte von $I - Q(w)$ durch Null ersetzt, bis auf das (i, i) -tes Element, welches wir zu 1 abändern. Die Elemente der Matrix $(I - Q(w))_i$ sind somit Polynome in w_k , $k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \rho(\Lambda_i)$.

Als die Determinante von $(I - Q(w))_i$ ist $\alpha_i(w)$ ein Polynom in w_k , $k \in \{1, 2, \dots, s\} \setminus \rho(\Lambda_i)$.

Setzen wir nun $A = (a_{\mu\nu})_{\mu,\nu} := (I - Q(w))_i$. Dann gilt nach Leibnizformel

$$\alpha_i(w) = \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}, \quad (3.4)$$

wobei \mathfrak{S}_n die symmetrische Gruppe zum Index n und $\operatorname{sgn} \sigma$ das Signum der Permutation σ ist. Jedes $a_{\sigma(\mu),\nu}$ in (3.4) ist ein Polynom in w_k , $k \in \rho(\Lambda_{\sigma(\mu)})$. Da aber Λ_μ , $\mu = 1, \dots, n$ paarweise disjunkt sind, so sind auch $\rho(\Lambda_{\sigma(\mu)})$, $\mu = 1, \dots, n$ paarweise disjunkt. Damit ist jedes Monom in der Summe quadratfrei. Daher besteht $\alpha_i(w)$ aus quadratfreien Monomen. \square

Lemma 3.2.12. $\tau(Q(w)) = (\alpha_1(w), \alpha_2(w), \dots, \alpha_n(w))$ ist nicht konstant.

Beweis. Angenommen, $\alpha_k(w)$ ist konstant für $k = 1, \dots, n$. Setzen wir $\alpha_k := \alpha_k(w)$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Als Vielfache vom Perron-Eigenvektor von $Q(w)$ ist $\alpha \neq 0$ und $\alpha = \alpha Q(w)$. Somit ist auch $[\alpha Q(w)]_k$ konstant für $k = 1, \dots, n$. Nach Satz 3.2.9 gibt es $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $[Q(w)]_{ij} = w_{\rho(i,j)}$, und für das j -te Element von α gilt

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_{k=1}^n \alpha_k [Q(w)]_{kj} \\ &= \alpha_1 [Q(w)]_{1j} + \dots + \alpha_{i-1} [Q(w)]_{i-1,j} + \alpha_i w_{\rho(i,j)} \\ &\quad + \alpha_{i+1} [Q(w)]_{i+1,j} + \dots + \alpha_n [Q(w)]_{nj}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Da für alle $k = 1, \dots, n$ $\alpha_k \neq 0$ und $[Q(w)]_{kj}$ Polynome in $\{w_\mu \mid \mu \in \rho(\Lambda_k)\}$ sind, wobei $\rho(\Lambda_k)$ paarweise disjunkt sind, verschwindet der Term $\alpha_i w_{\rho(i,j)}$ in (3.5) nicht. Daher ist α_j bzw. α nicht konstant, was unserer Annahme widerspricht. \square

Korollar 3.2.13. $\langle \tau(Q(w)), x \rangle$ ist ein nicht-konstantes, nicht-lineares Polynom in $w_1, w_2, \dots, w_s, x_1, x_2, \dots, x_n$, dessen Monome quadratfrei sind.

Aus obigem Korollar folgt, dass die Menge \mathcal{N} die Nullstellenmenge einer nicht-konstanten, nicht-linearen Polynomfunktion $\langle \tau(Q(w)), x \rangle$ ist. Dies ermöglicht weiterhin \mathcal{N} auf ihre geometrische Eigenschaft zu untersuchen. Satz 3.2.24 ist ein integraler Teil dieser Analyse. Es werden im Folgenden die für Satz 3.2.24 notwendigen Definitionen und Resultate vorgestellt.

Satz 3.2.14. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wird $f \in C^\infty(U)$ in einer Kugel $B_r(a) \subset U$ durch eine Reihe homogener Polynome P_k mit Grad $P_k = k$ dargestellt,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x - a), \quad x \in B_r(a),$$

so ist diese die Taylorreihe von f in a .

Beweis. Siehe [14, S. 67] □

Korollar 3.2.15. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion. Ist sie in einer offenen Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ gleich 0, dann ist sie konstant 0 auf ganz \mathbb{R}^n .

Der nachstehende Satz ist ein Resultat der Topologie, auf den sich das Lemma 3.2.19 bezieht.

Satz 3.2.16. Sind zwei nichtleere offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph, dann ist $m = n$.

Beweis. Siehe [12, S. 126] □

Definition 3.2.17. Eine nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt d -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow V$ auf eine offene Teilmenge V von \mathbb{R}^n gibt so, dass gilt

$$\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}_0^d \cap V$$

Ein solcher Diffeomorphismus φ heißt eine *Karte für M* und $M \cap U$ deren *Kartengebiet*.

Ist φ von der Klasse C^p , so sagt man, M sei eine C^p -Untermannigfaltigkeit.

Beispiel 3.2.18. Der Graph M einer C^p -Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist eine n -dimensionale C^p -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis. Setzen wir $U = V := \Omega \times \mathbb{R}$. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ durch $\varphi(x, y) := (x, f(x) - y)$ definiert. φ ist ein Diffeomorphismus von der Klasse C^p , denn $\varphi \circ \varphi = \text{id}$ und $\varphi \in C^p(\Omega)$. Sie bildet außerdem M , den Graphen von f , auf die Menge $\Omega \times \{0\}$ in $\mathbb{R}_0^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ab; M ist also eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit. □

Lemma 3.2.19. *Sei M eine d -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Zu jedem $x \in M$ gibt es $x_1, \dots, x_d \in M$, so dass $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_d - x$ linear unabhängig sind.*

Beweis. Angenommen es gibt ein $x \in M$, so dass $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_d - x$ linear abhängig sind für alle $x_1, \dots, x_d \in M$. Dann existiert ein linearer Unterraum L' in \mathbb{R}^n mit $\dim(L') =: k < d$ und $x' - x \in L'$ für alle $x' \in M$. Damit ist M in einem k -dimensionalen affinen Unterraum $L := x + L'$ enthalten.

Es gibt eine Basiswechselmatrix, die L' auf \mathbb{R}_0^k abbildet. Da Translation und Basiswechsel homöomorphe Operationen sind, gilt $L \cong L' \cong \mathbb{R}_0^k$; Bezeichnen wir mit $\psi : L \rightarrow \mathbb{R}_0^k$ einen Homöomorphismus zwischen L und \mathbb{R}_0^k .

Da M eine d -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, existiert eine offene Umgebung U von x und eine Karte φ für $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(M \cap U) \subset \mathbb{R}_0^d$. Insgesamt gilt bzgl. der Teilraumtopologie auf $M \cap U$

$$\varphi(M \cap U) \cong M \cap U \cong \psi(M \cap U).$$

$\varphi(M \cap U)$ und $\psi(M \cap U)$ sind offen in \mathbb{R}_0^d bzw. \mathbb{R}_0^k . Aus $\mathbb{R}_0^d \cong \mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_0^k \cong \mathbb{R}^k$ und Satz 3.2.16 folgt $d = k$, was unserer Annahme widerspricht. \square

Definition 3.2.20. Sei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2, \dots, k$. Sind $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$ und $\lambda_i \geq 0$ für alle i , dann wird

$$y := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k$$

als Konvexkombination von x_1, x_2, \dots, x_k bezeichnet.

Definition 3.2.21. Eine Menge S ist heißt konvex, wenn jede Konvexkombination von Punkten aus S in S liegt.

Definition 3.2.22. Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet* oder auch *sternförmig*, wenn es in M einen Punkt x , ein „Zentrum“, gibt, derart, dass für jeden weiteren Punkt $a \in M$ die Verbindungsstrecke $\{\lambda a + (1 - \lambda)x \mid \lambda \in [0, 1]\}$ in M liegt.

Definition 3.2.23. Sei M eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n . Ein Vektor $v \in M$ heißt *Tangentialvektor an M im Punkte $x \in M$* , wenn es in M eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, $\epsilon > 0$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = v$. Die Gesamtheit der Tangentialvektoren an M in x heißt *Tangentialraum* von M in x und wird mit $T_x M$ bezeichnet. Ferner heißt $T_x^{\text{aff}} M := x + T_x M$ *affiner Tangentialraum*.

Bemerkung. Ein Tangentialraum nach obiger Definition ist ein \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension d . (Siehe [14, S. 120]).

Satz 3.2.24. *Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und N die Nullstellenmenge von g . Existiert eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$, so dass $M := W \cap N$ ein Sterngebiet mit Zentrum $x \in N$ und zugleich eine d -dimensionale differenzierbare*

Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, dann gibt es einen d -dimensionalen affinen Unterraum $L \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$M \subset L \subset N.$$

Beweis. Seien die Voraussetzungen wie oben gegeben. Da $x \in \mathbb{R}^n$ das Zentrum von M ist, gilt

$$f(\lambda) := g(\lambda y + (1 - \lambda)x) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in [0, 1], y \in M.$$

Nach Korollar 3.2.15 ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleich Null für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y \in M$, also gilt

$$\lambda y + (1 - \lambda)x \in N \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, y \in M. \quad (3.6)$$

Wegen (3.6) gibt es zu jedem $y \in M$ eine stetig differenzierbare Kurve in M definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\ \lambda &\longmapsto \lambda y + (1 - \lambda)x \end{aligned}$$

mit $\epsilon > 0$. Da $\gamma(0) = x$ und $\dot{\gamma}(0) = y - x$, ist $y - x$ ein Tangentialvektor an M im Punkte x . Also ist $y - x \in T_x M$ bzw. $y \in T_x^{\text{aff}} M$ für alle $y \in M$. Damit ist $M \subset T_x^{\text{aff}} M$.

Als ein d -dimensionaler affiner Unterraum lässt sich $T_x^{\text{aff}} M$ durch die Hintereinanderausführung von einer geeigneten Translation und einer Basiswechselmatrix auf \mathbb{R}_0^d homöomorph abbilden. Es gibt also einen Homöomorphismus $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\psi(T_x^{\text{aff}} M) = \mathbb{R}_0^d$.

Da M eine d -dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist, gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine Karte φ für U mit $\varphi(M \cap U) \subset \mathbb{R}_0^d$.

$M \cap U$ ist damit sowohl homöomorph zu $\psi(M \cap U)$ als auch zu $\varphi(M \cap U)$ bzgl. der Teilraumtopologie. Dies impliziert, dass auch $\psi(M \cap U)$ offen ist in \mathbb{R}_0^d . Also ist $M \cap U$ offen in $T_x^{\text{aff}} M$. Damit existiert eine offene Kugel $B_r(x) \subset U$, $r > 0$, so dass

$$B_r(x) \cap M = B_r(x) \cap T_x^{\text{aff}} M.$$

Als Durchschnitt von zwei konvexen Mengen ist $B_r(x) \cap T_x^{\text{aff}} M$ konvex und so ist $B_r(x) \cap M$ auch konvex.

Nun gibt es nach Lemma 3.2.19 $x_1, \dots, x_d \in B_r(x) \cap M$, so dass $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_d - x$ linear unabhängig sind. Wegen der Konvexität von $B_r(x) \cap M$ ist jede Konvexkombination von x, x_1, \dots, x_d in $B_r(x) \cap M$ und es gilt damit:

$$\begin{aligned} u(\lambda_1, \dots, \lambda_d) &:= g\left(\left(1 - \sum_{i=1}^d \lambda_i\right)x + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_d x_d\right) \\ &= g(x + \lambda_1(x_1 - x) + \dots + \lambda_d(x_d - x)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\lambda_i \geq 0$, $0 \leq \sum_{i=1}^d \lambda_i \leq 1$. Die Funktion $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleich 0 in $B_{\frac{1}{2d}}((\frac{1}{2d}, \dots, \frac{1}{2d})) \subset \mathbb{R}^d$, denn für alle $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in B_{\frac{1}{2d}}((\frac{1}{2d}, \dots, \frac{1}{2d}))$ gilt

$$\left| \lambda_k - \frac{1}{2d} \right| < \frac{1}{2d}, \quad k = 1, \dots, d$$

und damit

$$0 < \lambda_k < \frac{1}{d}, \quad k = 1, \dots, d.$$

Also ist nach Korollar 3.2.15 $u = 0$ auf ganz \mathbb{R}^d , und dies impliziert $g = 0$ auf

$$x + \text{span}\{x_1 - x, \dots, x_d - x\},$$

wobei $\text{span}(A)$ die lineare Hülle einer Teilmenge A eines Vektorraums bezeichnet.

Die Vektoren x_1, \dots, x_d sind außerdem wegen $M \subset T_x^{\text{aff}}M$ auch in $T_x^{\text{aff}}M$ enthalten. Daher sind $x_1 - x, \dots, x_d - x$ in T_xM , dem Tangentialraum von M in x , enthalten und bilden eine Basis. Schließlich gilt

$$x + \text{span}\{x_1 - x, \dots, x_d - x\} = T_x^{\text{aff}}M.$$

So ist $g = 0$ auf $T_x^{\text{aff}}M$ und es folgen die Relationen $M \subset T_x^{\text{aff}}M \subset N$. \square

Im Folgenden wird die Hauptaussage dieses Kapitels bewiesen. Dabei wird gezeigt, dass die Menge $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^{s+n}$ lokal eine $s+n-1$ dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{s+n} ist und dass sie als Nullstellenmenge von $\langle \tau(Q(w)), x \rangle$ kein Sterngebiet der Dimension $s+n-1$ enthält. So gibt es zu jedem Punkt auf \mathcal{N} einen weiteren Punkt, so dass ihre Verbindungslinie nicht in \mathcal{N} enthalten ist.

Lemma 3.2.25. *\mathcal{N} ist eine $s+n-1$ dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{s+n} .*

Beweis. Wir zeigen, dass zu jedem Punkt $(w, x) \in \mathcal{N}$ eine Umgebung $U_{w,x} \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{s+n}$ existiert, so dass $U_{w,x} \cap \mathcal{N}$ eine $s+n-1$ dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{s+n} ist. Dafür reicht es nach Beispiel 3.2.18 zu zeigen, dass $U_{w,x} \cap \mathcal{N}$ der Graph einer C^∞ -Funktion auf einer offenen, $s+n-1$ dimensionalen Menge ist.

Die Bedingung $(w, x) \in \mathcal{N}$ ist gleichbedeutend mit

$$\langle \tau(Q(w)), x \rangle = 0.$$

Da $\tau(Q(\cdot))$ stetig und $\tau(Q(w))$ ein Vielfaches vom Perron-Eigenvektor von $Q(w)$ ist, existiert eine Umgebung $V_w \subset \mathbb{R}^s$ von w , so dass $\alpha(v) = (\alpha(v)_i)_i := [\tau(Q(v))] \neq 0$ für alle $v \in V_w$. Aus der Tatsache

$$\begin{aligned} & (v, y) \in \mathcal{N} \\ \iff & 0 = \langle \tau(Q(v)), y \rangle = \langle \alpha(v), y \rangle = \alpha(v)_1 y_1 + \alpha(v)_2 y_2 + \dots + \alpha(v)_n y_n \end{aligned}$$

ist es ersichtlich, dass der Graph der Funktion

$$f : V_w \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(v, (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})) := -\frac{\alpha(v)_1 y_1 + \alpha(v)_2 y_2 + \dots + \alpha(v)_{n-1} y_{n-1}}{\alpha(v)_n}$$

gleich der Menge $(V_w \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}$ ist. Nach Lemma 3.2.11 sind $\alpha(v)_i$, $i = 1, \dots, n$ Polynome. Daher ist f analytisch auf $V_w \times \mathbb{R}^{n-1}$. Mit $U_{w,x} := V_w \times \mathbb{R}^n$ ist $U_{w,x} \cap \mathcal{N}$ der Graph einer C^∞ -Funktion f . \square

Satz 3.2.26. *Zu jedem $(w, x) \in \mathcal{N}$ und jeder Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{s+n}$ von (w, x) existiert ein $(v, y) \in U \cap \mathcal{N}$ und ein $\lambda \in (0, 1)$, so dass $\lambda(w, x) + (1-\lambda)(v, y) \notin \mathcal{N}$.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung indirekt. Seien $(w, x) \in \mathcal{N}$ und eine Umgebung U von x gegeben. Angenommen, für alle $(v, y) \in U \cap \mathcal{N}$ und $\lambda \in [0, 1]$ gelte:

$$\lambda(w, x) + (1 - \lambda)(v, y) \in U \cap \mathcal{N}.$$

Diese Aussage ist äquivalent dazu, dass $U \cap \mathcal{N}$ ein Sterngebiet mit Zentrum (w, x) ist.

Sei $\tilde{\mathcal{N}}$ die Nullstellenmenge der Abbildung

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^{s+n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_{s+n}) &\longrightarrow \langle \tau(Q(z_1, \dots, z_s)), (z_{s+1}, \dots, z_{s+n}) \rangle \end{aligned}$$

Es gilt dann $\mathcal{N} = \tilde{\mathcal{N}} \cap (\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n)$. Wir wählen nun eine offene Kugel $W \subset U$ mit $(w, x) \in W$ und $W \cap \mathcal{N} = W \cap \tilde{\mathcal{N}}$. $W \cap \tilde{\mathcal{N}}$ ist als Durchschnitt einer konvexen Menge W und eines Sterngebietes $U \cap \mathcal{N}$ selbst ein Sterngebiet und zugleich eine $s+n-1$ dimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{s+n} nach Lemma 3.2.25. Somit enthält $\tilde{\mathcal{N}}$ nach Satz 3.2.24 eine affine Hyperebene in \mathbb{R}^{s+n} . Sei die affine Hyperebene durch Nullstellenmenge einer Polynomfunktion

$$h(z_1, \dots, z_{s+n}) := \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s+n} \alpha_i z_i, \quad \alpha_i \neq 0 \text{ für } i = 1, \dots, s+n$$

gegeben. Fassen wir die Funktionen $g(z_1, \dots, z_{s+n})$ und $h(z_1, \dots, z_{s+n})$ als Polynome in z_1, \dots, z_{s+n} über \mathbb{R} auf, dann teilt $h(z_1, \dots, z_{s+n})$ das Polynom $g(z_1, \dots, z_{s+n})$. Da aber $g(z_1, \dots, z_{s+n})$ nicht-linear ist nach Lemma 3.2.12, teilt es hingegen $h(z_1, \dots, z_{s+n})$ nicht, d. h. es existiert ein nicht-konstantes Polynom $l(z_1, \dots, z_{s+n})$, so dass

$$g(z_1, \dots, z_{s+n}) = l(z_1, \dots, z_{s+n})h(z_1, \dots, z_{s+n}).$$

Es folgt daraus, dass $g(z_1, \dots, z_{s+n})$ ein Monom enthält, das *nicht* quadratfrei ist. Dies ist ein Widerspruch, denn $g(z_1, \dots, z_{s+n})$ besteht aus quadratfreien Monomen nach Korollar 3.2.13. \square

Satz 3.2.27. *Zu jedem fairen PB-Spiel (A, x) vom Spieltyp Γ und einem vorgegebenem $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ gibt es ein weiteres fairem PB-Spiel (B, y) desselben Spieltyps mit $\|A - B\|_1 < \epsilon$ und $\|x - y\|_1 < \delta$, so dass für diese Spiele eine paradoxe Situation vorliegt. Mit anderen Worten: es gibt ein $\lambda \in (0, 1)$, so dass $(\lambda A + (1 - \lambda)B, \lambda x + (1 - \lambda)y)$ ein Gewinnspiel bzw. ein Verlustspiel wird.*

Beweis. Es sei ein fairem PB-Spiel (A, x) vom Spieltyp Γ gegeben. Dann gibt es nach Satz 3.2.8 ein $w \in \mathcal{B}$ mit $A := Q(w)$; also ist $(w, x) \in \mathcal{N}$. Da \mathcal{B} offen ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $(Q(\tilde{w}), \tilde{x})$ vom Spieltyp Γ ist für alle $(\tilde{w}, \tilde{x}) \in B_r(w, x) \cap \mathcal{N}$. Setzen wir $\tilde{r} := \min(r, \epsilon, \delta)/2$.

Nach Satz 3.2.26 existiert nun ein $(v, y) \in B_{\tilde{r}}(w, x) \cap \mathcal{N}$ und ein $\lambda \in (0, 1)$, so dass $\lambda(w, x) + (1 - \lambda)(v, y) \notin \mathcal{N}$. Ferner gilt nach Satz 3.2.8:

$$Q(\lambda w + (1 - \lambda)v) = \lambda Q(w) + (1 - \lambda)Q(v).$$

So ist $(\lambda Q(w) + (1 - \lambda)Q(v), \lambda x + (1 - \lambda)y)$ ein nicht-faires PB-Spiel.

Es gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} \|y - x\|_1 &\leq \|v - w\|_1 + \|y - x\|_1 \\ &= \|(v, y) - (w, x)\|_1 \\ &< \tilde{r} \leq \delta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \|Q(v) - Q(w)\|_1 &\leq 2\|v - w\|_1 \\ &\leq 2\|(v, y) - (w, x)\|_1 \\ &< 2\tilde{r} \leq \epsilon \end{aligned}$$

Mit $B := Q(v)$ folgt schließlich die Behauptung. \square

Wir schließen dieses Kapitel mit einem Beispiel ab.

Beispiel 3.2.28. Gegeben sei folgender Spieltyp:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Folglich ist die Abbildung Q zu Γ definiert durch

$$\begin{aligned} Q: (0, 1) \times (0, 1) &\longrightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ w = (w_1, w_2) &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - w_1 & 0 & w_1 \\ 1 - w_2 & w_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

PB-Spiele vom Spieltyp Γ haben die Gestalt $(Q(w), x)$, $w \in (0, 1)^2$, $x \in \mathbb{R}^3$ und sind genau dann fair, wenn

$$\langle \tau(Q(w)), x \rangle = 0.$$

Um die Nullstellenmenge \mathcal{N} der Abbildung $(w, x) \mapsto \langle \tau(Q(w)), x \rangle$ in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem zu veranschaulichen, setzen wir $x_2 := 1$ und $x_3 := -1$ für $x = (x_1, x_2, x_3)$ und betrachten die Nullstellenmenge der Abbildung

$$g : (0, 1)^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$g(w, x_1) = \langle \tau(Q(w)), (x_1, 1, -1) \rangle.$$

Direktes Rechnen liefert

$$\langle \tau(Q(w)), (x_1, 1, -1) \rangle = w_1 w_2 x_1 + w_1 - x_1 - 1.$$

Die Nullstellenmenge von obigem Polynom ist eine Untermannigfaltigkeit von $(0, 1)^2 \times \mathbb{R}$. Sie ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

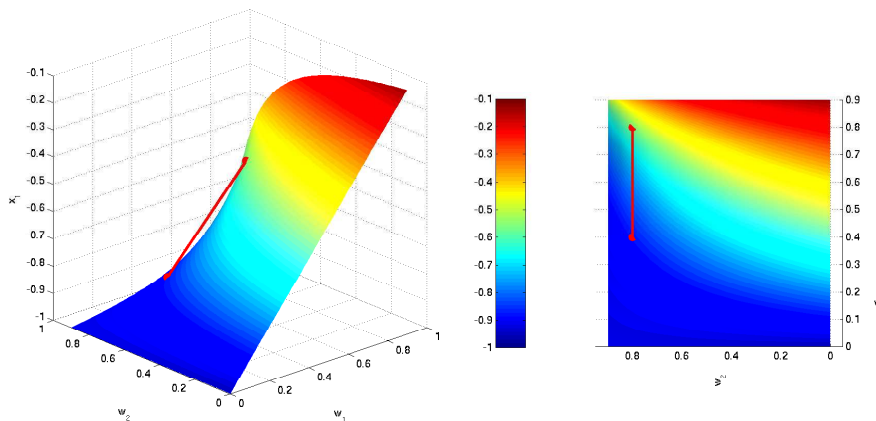


Abbildung 3.3 – Die Nullstellenmenge von g . Zwei Punkte $(4/5, 4/5, -5/9)$ und $(2/5, 4/5, -15/17)$ auf der Nullstellenmenge, die das PB-Spiel $(Q((4/5, 4/5)), (-5/9, 1, -1))$ bzw. $(Q((2/5, 4/5)), (-15/17, 1, -1))$ repräsentieren, sind zusätzlich aufgezeichnet. Da die Verbindungslinie der Punkte nicht in der Nullstellenmenge enthalten ist, liegt für die durch die beiden Punkte repräsentierten PB-Spiele eine paradoxe Situation vor.

Kapitel 4

Vergangenheitsabhängige Spiele

The (Parrondo) effect is counter-intuitive . . . It has no analogue in the random-walk world assumed by standard finance theory.

[11, S. 77]

Die Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeit von Spiel B des Parrondo Original-Beispiels hängen vom aktuellen Kapitalstand des Spielers ab. Obwohl das Original-Beispiel bei bestimmten Anwendungen interessant ist (siehe [10]), ist ein Spiel im Hinblick auf z. B. finanzwirtschaftlichen Anwendungen praktischer, wenn es nicht vom aktuellen Kapitalstand abhängt. Für diesen Zweck untersuchten Parrondo et. al. [21] die unter dem Stichwort *vergangenheitsabhängige Spiele* (history-dependent games) bekannten Kombinationen von zwei Spielen, bei denen das erste Spiel ein Münzwurf-Spiel wie im Original-Beispiel ist und das zweite ein solches, dessen Gewinn- bzw. Verlustwahrscheinlichkeiten ausschließlich vom Ausgang der letzten zwei Spielrunden abhängen. Dabei wurde aus den beiden Spielen ein ähnlicher Effekt wie im Original-Beispiel erzeugt, d. h. zwei faire Spiele bzw. Verlustspiele wurden zu einem Gewinnspiel kombiniert. Kay und Johnson [13] konnten darüber hinaus eine paradoxe Situation konstruieren, bei der die Spielkombination im Gegensatz zu der aus [21] ausschließlich aus zwei vergangenheitsabhängigen Spielen bestand.

In diesem Kapitel wird zunächst einen Überblick über vergangenheitsabhängige Spiele gegeben. Danach wird ihre ursprüngliche Definition überarbeitet und ein allgemeinerer Spielbegriff formuliert, so dass die Spiele nicht nur von den letzten zwei Spielrunden, sondern auch von den letzten n Spielrunden abhängen.

Außerdem werden die möglichen Spielausgänge von zwei (z. B. Gewinn und Verlust) auf m erweitert. Abschließend wird die Primitivität der in diesem Kapitel vorkommenden Übergangsmatrizen gezeigt.

4.1 Vergangeneheitsabhängige Spiele von Parrondo et. al.

Im Folgenden wird ein Beispiel aus [11] vorgestellt, das das Original-Beispiel von Parrondo et. al. zu vergangenheitsabhängigen Spielen aus Sicht der Wirtschaft darstellt.

Beispiel 4.1.1 (Beispiel von Parrondo et. al.). Ein Tageshändler¹ konzentriert sich auf zwei bestimmte Märkte, die wir A und B nennen. Zu jedem Tagesbeginn muss er entscheiden, ob er in Markt A oder B investiert. Nach der Entscheidung investiert er einen festen Betrag, um in dem ausgewählten Markt eine Position zu öffnen. Am Tagesende schließt er diese Position. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Gewinn bzw. Verlust jeweils eine Einheit beträgt. Es wird zusätzlich angenommen, dass die Details seiner Position zu einer einfachen Gewinnwahrscheinlichkeit zusammengefasst werden können. In Markt A beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 1/2$, wenn man von den Transaktionskosten und dem Spread² absieht. Im Durchschnitt wird der Händler damit weder gewinnen noch verlieren. Werden die Transaktionskosten und der Spread in Betracht gezogen, so wird die Gewinnwahrscheinlichkeit reduziert auf $p = 1/2 - \epsilon$, wobei ϵ positiv ist.

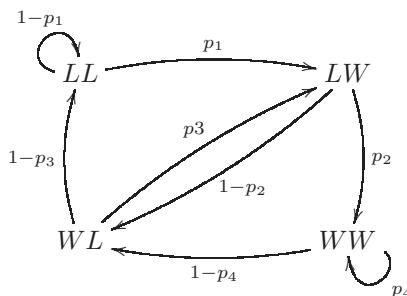
In Markt B ist die Investitionsstrategie des Händlers so, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von den Erfolgen der letzten zwei Tage abhängt. Hat er in den letzten zwei Tagen seine Position jeweils mit einem Verlust geschlossen, so beträgt seine Gewinnwahrscheinlichkeit p_1 . Hat er hingegen am vorletzten Tag einen Gewinn und am letzten Tag einen Verlust erzielt oder vice versa, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit p_2 bzw. p_3 . Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt p_4 , wenn seine Position an den beiden Tagen jeweils mit einem Gewinn geschlossen wurde. Dabei sind p_1 bis p_4 so gewählt, dass im Durchschnitt die Gewinnwahrscheinlichkeit in Markt B mit Berücksichtigung der Transaktionskosten und des Spreads kleiner ist als $1/2$.

Eine paradoxe Situation tritt in diesem Zusammenhang ein, wenn der Händler abwechselnd in Markt A und in Markt B investiert: nach dieser Strategie beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit mehr als $1/2$ und der Händler wird auf lange Sicht Gewinn erzielen.

¹Tageshändler: Anleger, der ein Investment maximal bis zum Schluss eines Handelstages hält.

²Spread: Differenz zwischen dem besten Kauf- und Verkaufskurs für ein Wertpapier zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Im Folgenden wird das obige Beispiel anhand der Begriffe der PB-Spiele analysiert. Hierbei werden die beiden Investitionsstrategien durch zwei PB-Spiele repräsentiert, die wir mit (P_A, x_A) bzw. (P_B, x_B) bezeichnen. Betrachte zuerst die Matrix P_B . Der Graph $\mathcal{G}(P_B)$ von P_B hat die Gestalt:



Die Zustände LL, LW, WL und WW repräsentieren hier die möglichen Verläufe der vergangenen zwei Spielrunden zum Zeitpunkt t , wobei der linke Buchstabe eines Zustandes den Spielausgang zum Zeitpunkt $t-2$ repräsentiert und der rechte den Spielausgang zum Zeitpunkt $t-1$ ($W = \text{Win}$, $L = \text{Lose}$). Zum Beispiel kann man nach einem Gewinn und einem darauf folgenden Verlust – das entspricht dem Zustand WL – mit Wahrscheinlichkeit p_3 das aktuelle Spiel gewinnen und zu LW übergehen oder mit Wahrscheinlichkeit $1-p_3$ verlieren und zu LL wechseln. Demnach ist die PB-Matrix von Spiel (P_B, y) folgendermaßen:

$$P_B = \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_2 & p_2 \\ 1-p_3 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_4 & p_4 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dabei entsprechen die Zeilen von P_B der Reihe nach den Zuständen LL, LW, WL bzw. WW . Wegen $P_B^2 > 0$ für $p_1, p_2 \in (0, 1)$ ist P_B primitiv und somit existiert der Perron-Eigenvektor π_B der Matrix mit

$$\pi_B = \frac{1}{p_1 p_2 + (1 + 2p_1 - p_3)(1 - p_4)} \begin{pmatrix} (1-p_3)(1-p_4) \\ (1-p_4)p_1 \\ (1-p_4)p_1 \\ p_1 p_2 \end{pmatrix}^T.$$

Die Übergangsmatrix für Spiel A erhält man aus der für Spiel B , indem man setzt $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$:

$$P_A = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{bmatrix}.$$

Also erhält man π_A durch diese Setzung aus π_B .

Die Gewinnvektoren für beide Spiele sind auf die gleiche Weise konstruiert wie die Gewinnvektoren auf S. 19 ff. und sie lauten

$$x_A = \begin{pmatrix} 2p - 1 \\ 2p - 1 \\ 2p - 1 \\ 2p - 1 \end{pmatrix}$$

für Spiel A und

$$x_B = \begin{pmatrix} 2p_1 - 1 \\ 2p_2 - 1 \\ 2p_3 - 1 \\ 2p_4 - 1 \end{pmatrix},$$

für Spiel B . Parrondo et. al. haben für ihr Beispiel folgenden Parameterwerte gewählt:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} - \epsilon \\ p_1 &= \frac{9}{10} - \epsilon \\ p_2 &= p_3 = \frac{1}{4} - \epsilon \\ p_4 &= \frac{7}{10} - \epsilon \end{aligned}$$

Die daraus resultierende ϕ -Funktion ist:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \pi_\lambda \cdot (\lambda x_A + (1 - \lambda)x_B) \\ &= -\frac{1}{20}\lambda^2 + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{5}\epsilon\right)\lambda - \frac{11}{5}\epsilon \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$= -\frac{1}{20}\left(\lambda - \frac{1}{2} - 2\epsilon\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\epsilon - \frac{21}{4}\right)^2 - \frac{11}{2} \quad (4.3)$$

In (4.2) ist zu erkennen, dass die Spiele A und B fair für $\epsilon = 0$ sind, denn ihre asymptotische Gewinnerwartungen $\pi_A \cdot x_A = \phi(0)$ und $\pi_B \cdot x_B = \phi(1)$ sind gleich 0. Für $\epsilon > 0$ sind sie aber Verlustspiele, da $\phi(0) < 0$ und $\phi(1) < 0$. Aus (4.3) erkennt man, dass ϕ eine Parabel mit Maximum bei $\lambda = 1/2 + 2\epsilon$ ist; der Verlauf von ϕ in Abhängigkeit von λ und ϵ ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Für ein hinreichend kleines ϵ bleibt das Maximum im positiven Bereich, was besagt, dass in diesem Beispiel ein ähnlicher Effekt wie in Parrondos Original-Beispiel hergestellt worden ist. Mit anderen Worten, für diese vergangenheitsabhängigen Spiele liegt eine paradoxe Situation vor.

Die PB-Spiele in diesem Abschnitt besitzen Übergangswahrscheinlichkeiten, die abhängig von den letzten beiden Spielrunden sind. Außerdem gibt es für diese Spiele lediglich zwei mögliche Ausgänge (W oder L). Für eine breite Anwendung

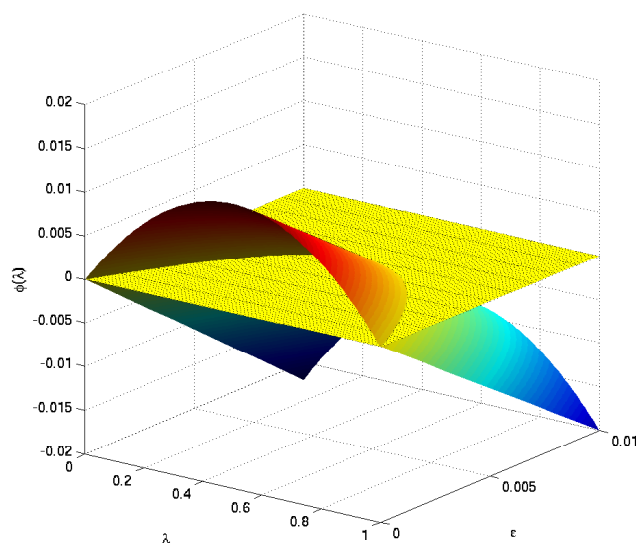


Abbildung 4.1 – Verlauf von ϕ mit zusätzlichem Parameter ϵ .

ist ein Spiel wünschenswert, das die soeben erwähnten Einschränkungen nicht besitzt. Im nächsten Abschnitt wird ein allgemeines Modell eingeführt, das nicht nur die Einschränkungen behebt, sondern mit bestimmter Voraussetzung sogar äquivalent zu PB-Spielen ist.

4.2 Ein allgemeines Modell für vergangenheitsabhängige Spiele

In diesem Abschnitt werden $V_{m,n}$ -Spiele, das sind vergangenheitsabhängige Spiele mit m möglichen Ergebnissen, welche von den letzten n -Spielrunden abhängig sind, vorgestellt. Anschließend wird bewiesen, dass zu jedem $V_{m,n}$ -Spiel unter einer bestimmten Bedingung ein PB-Spiel existiert, das zu dem $V_{m,n}$ -Spiel äquivalent ist.

Definition 4.2.1. Ein $V_{m,n}$ -Spiel (S, p, r) mit Ergebnismenge $S = \{z_0, \dots, z_{m-1}\}$ und Ertragsfunktion $r : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein stochastischer Prozess (X_0, X_1, \dots) mit Zustandsmenge S und einer Funktion $p : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, bei dem für alle $k \geq n$ und $i_0, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}(X_k = z_{i_k} \mid X_0 = z_{i_0}, X_1 = z_{i_1}, \dots, X_{k-2} = z_{i_{k-2}}, X_{k-1} = z_{i_{k-1}}) \\
 &= \mathbf{P}(X_k = z_{i_k} \mid X_{k-n} = z_{i_{k-n}}, \dots, X_{k-2} = z_{i_{k-2}}, X_{k-1} = z_{i_{k-1}}) \\
 &= p(z_{i_{k-n}}, \dots, z_{i_{k-1}}, z_{i_k}).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sei $z_{i_k} \in S$ das Spielergebnis von der k -ten Runde des Spiels mit $k \geq n$. Der Ertrag der k -ten Runde ist durch $r(z_{i_{k-n}}, \dots, z_{i_{k-1}}, z_{i_k})$ definiert.

Bemerkung. Die obige Definition beschreibt ein vergangenheitsabhängiges Spiel mit m möglichen Spielergebnissen, welches von den letzten n Spielrunden abhängig ist. Der Ausgang der k -ten Spielrunde wird dabei durch die Zufallsvariable X_k repräsentiert. Die Definition des Ertrags besagt, dass der Ertrag ausschließlich von dem jetzigen Spielergebnis und den letzten n Spielergebnissen abhängt und nicht von der aktuellen Zeit k .

Das Kapital nach k Runden ist die Summe der bis zu dem Zeitpunkt erzielten Erträge. So ist es naheliegend das Kapital wie folgt zu definieren.

Definition 4.2.2. Das Kapital c_k nach k Runden eines $V_{m,n}$ -Spiels (S, p, r) mit Startkapital $C \in \mathbb{R}$ ist eine reelle Zufallsvariable, die durch

$$c_k := C + \sum_{j=n}^k r(X_{j-n}, \dots, X_j).$$

definiert ist.

Bemerkung. Da der Ertrag in der k -ten Spielrunde von den letzten n Spielrunden abhängt, ist das Kapital c_k für $0 \leq k \leq n-1$ nicht definiert. Diesem Problem können wir entgegen, indem wir $c_k = C$ für $0 \leq k \leq n-1$ annehmen.

Proposition 4.2.3. Das erwartete Kapital $E(c_k)$ eines $V_{m,n}$ -Spiels (S, p, r) zum Zeitpunkt $k \geq n$ mit Startkapital $C \in \mathbb{R}$ ist

$$E(c_k) = C + \sum_{j=n}^k \sum_{0 \leq i_{j-n}, \dots, i_j \leq m-1} r(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) p(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) \mathbf{P}(X_{j-n} = z_{i_{j-n}}, \dots, X_{j-1} = z_{i_{j-1}}).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} E(c_k) &= E\left(C + \sum_{j=n}^k r(X_{j-n}, \dots, X_j)\right) \\ &= C + \sum_{j=n}^k E(r(X_{j-n}, \dots, X_j)) \\ &= C + \sum_{j=n}^k \sum_{0 \leq i_{j-n}, \dots, i_j \leq m-1} r(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) \mathbf{P}(X_{j-n} = z_{i_{j-n}}, \dots, X_j = z_{i_j}) \\ &= C + \sum_{j=n}^k \sum_{0 \leq i_{j-n}, \dots, i_j \leq m-1} r(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) p(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) \mathbf{P}(X_{j-n} = z_{i_{j-n}}, \dots, X_{j-1} = z_{i_{j-1}}). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.2.4. *Es sei ein $V_{m,n}$ -Spiel (S, p, r) wie in Definition 4.2.1 gegeben. Dann gilt für alle $k \geq 1$ und $i_k, \dots, i_{k+n-1} \in \{0, \dots, m-1\}$:*

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_k = z_{i_k}, \dots, X_{k+n-1} = z_{i_{k+n-1}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_{k-1} \leq m-1} \prod_{j=0}^{k-1} p(z_{i_j}, \dots, z_{i_{j+n}}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}) \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach k .

Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_1 = z_{i_1}, \dots, X_n = z_{i_n}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0 \leq m-1} \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, X_1 = z_{i_1}, \dots, X_n = z_{i_n}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0 \leq m-1} \mathbf{P}(X_n = z_{i_n} \mid X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0 \leq m-1} p(z_{i_0}, \dots, z_{i_n}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

und der Induktionsschluss folgt aus

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{k+1} = z_{i_{k+1}}, \dots, X_{k+n} = z_{i_{k+n}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_k \leq m-1} \mathbf{P}(X_k = z_{i_k}, X_{k+1} = z_{i_{k+1}}, \dots, X_{k+n} = z_{i_{k+n}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_k \leq m-1} \mathbf{P}(X_{k+n} = z_{i_{k+n}} \mid X_k = z_{i_k}, \dots, X_{k+n-1} = z_{i_{k+n-1}}) \mathbf{P}(X_k = z_{i_k}, \dots, X_{k+n-1} = z_{i_{k+n-1}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_k \leq m-1} p(z_{i_k}, \dots, z_{i_{k+n}}) \mathbf{P}(X_k = z_{i_k}, \dots, X_{k+n-1} = z_{i_{k+n-1}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_k \leq m-1} p(z_{i_k}, \dots, z_{i_{k+n}}) \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_{k-1} \leq m-1} \prod_{j=0}^{k-1} p(z_{i_j}, \dots, z_{i_{j+n}}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}) \\ &= \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_k \leq m-1} \prod_{j=0}^k p(z_{i_j}, \dots, z_{i_{j+n}}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Aus vorhergehender Proposition folgt, dass man die Wahrscheinlichkeit für $n+1$ hintereinanderfolgende Ereignisse eines $V_{m,n}$ -Spiels durch seine n Anfangsverteilungen X_0, \dots, X_{n-1} und Abbildung p rekursiv ermitteln kann. Zudem kann man das erwartete Kapital $E(c_k)$ bestimmen, falls zusätzlich das Startkapital C bekannt ist.

Sei weiterhin ein stochastischer Prozess $(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \dots)$ mit

$$\tilde{X}_k = (X_k, \dots, X_{k+n-1}) \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

definiert.

Wir definieren eine Funktion $\sigma : S^n \rightarrow \{0, 1, \dots, m^n - 1\}$ mit

$$\sigma((z_{i_0}, z_{i_1}, \dots, z_{i_{n-1}})) = i_0 + mi_1 + m^2i_2 + \dots + m^{n-1}i_{n-1},$$

welche der Dezimaldarstellung von Zahlen aus dem Zahlensystem mit der Basis m aus n Ziffern entspricht. Die nächste Proposition zeigt, dass σ bijektiv ist.

Proposition 4.2.5. $\sigma^{-1} : \{0, 1, \dots, m^n - 1\} \rightarrow S^n$ mit $[\sigma^{-1}(i)]_\nu = z_{j_\nu}$,

$$j_\nu = \frac{(i \bmod m^{\nu+1}) - (i \bmod m^\nu)}{m^\nu} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, n-1$$

ist die Umkehrfunktion von σ , wobei die Operation \bmod den Rest aus der Division zweier Zahlen liefert.

Beweis. Da $\#\{0, \dots, m^n - 1\} = \#S^n$, reicht es zu zeigen, dass σ^{-1} injektiv ist. Sei $i \in \{0, \dots, m^n - 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma(\sigma^{-1}(i)) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} m^\nu \frac{(i \bmod m^{\nu+1}) - (i \bmod m^\nu)}{m^\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (i \bmod m^{\nu+1}) - (i \bmod m^\nu) \\ &= (i \bmod m^n) - (i \bmod 1) = i \end{aligned}$$

□

Im Folgenden betrachten wir den stochastischen Prozess $\{Y_0, Y_1, \dots\}$ mit $Y_k = \tilde{X}_k \circ \sigma^{-1}$.

Proposition 4.2.6. *Der stochastischer Prozess (Y_0, Y_1, \dots) mit $Y_k = \tilde{X}_k \circ \sigma^{-1}$ und Zustandsmenge $\{0, 1, \dots, m^n - 1\}$ ist eine Markovkette mit Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq m^n - 1}$, wobei*

$$p_{ij} = \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_k = i) \quad \text{für alle } k \geq 0, 0 \leq i, j \leq m^n - 1.$$

Beweis. Zu zeigen ist, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_{k-1} = i_{k-1}, Y_k = i) \\ = \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_k = i). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_{k-1} = i_{k-1}, Y_k = i) \\
&= \mathbf{P}(\tilde{X}_{k+1} \circ \sigma^{-1} = j \mid \tilde{X}_0 \circ \sigma^{-1} = i_0, \dots, \tilde{X}_{k-1} \circ \sigma^{-1} = i_{k-1}, \tilde{X}_k \circ \sigma^{-1} = i) \\
&= \mathbf{P}(\tilde{X}_{k+1} = \sigma^{-1}(j) \mid \tilde{X}_0 = \sigma^{-1}(i_0), \dots, \tilde{X}_{k-1} = \sigma^{-1}(i_{k-1}), \tilde{X}_k = \sigma^{-1}(i)) \\
&= \mathbf{P}((X_{k+1}, \dots, X_{k+n}) = \sigma^{-1}(j) \mid (X_0, \dots, X_{n-1}) = \sigma^{-1}(i_0), \dots \\
&\quad \dots, (X_{k-1}, \dots, X_{k+n-2}) = \sigma^{-1}(i_{k-1}), (X_k, \dots, X_{k+n-1}) = \sigma^{-1}(i)) \\
&= \mathbf{P}((X_{k+1}, \dots, X_{k+n}) = \sigma^{-1}(j) \mid (X_k, \dots, X_{k+n-1}) = \sigma^{-1}(i)) \\
&= \mathbf{P}(\tilde{X}_{k+1} = \sigma^{-1}(j) \mid \tilde{X}_k = \sigma^{-1}(i)) \\
&= \mathbf{P}(Y_{k+1} = j \mid Y_k = i).
\end{aligned}$$

□

Sei der Zeilenvektor $\mu := (\mathbf{P}(Y_0 = 0), \dots, \mathbf{P}(Y_0 = m^n - 1)) \in \mathbb{R}^{m^n - 1}$ die Anfangsverteilung der Markovkette (Y_0, Y_1, \dots) . Aufgrund obiger Proposition und der Eigenschaft der Markovketten in Proposition 2.2.2 auf S. 11 gilt:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(X_k = z_{i_k}, \dots, X_{k+n-1} = z_{i_{k+n-1}}) \tag{4.5} \\
&= \mathbf{P}(\tilde{X}_k = (z_{i_k}, \dots, z_{i_{k+n-1}})) \\
&= \mathbf{P}(Y_k = \sigma(z_{i_k}, \dots, z_{i_{k+n-1}})) \\
&= [\mu P^k]_{\sigma(z_{i_k}, \dots, z_{i_{k+n-1}})}.
\end{aligned}$$

Satz 4.2.7. Die Matrix $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j \leq m^n - 1}$ in Proposition 4.2.6 ist primitiv, falls die Abbildung $p : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ des der Matrix P zugrunde liegenden stochastischen Prozesses (X_0, X_1, \dots) (s. Definition 4.2.1) positiv ist, d. h. $p(z_{i_0}, \dots, z_{i_n}) > 0$ für alle $z_{i_0}, \dots, z_{i_n} \in S^{n+1}$.

Um diesen Satz zu beweisen, wird zuerst eine äquivalente Formulierung für Primitivität benötigt.

Definition 4.2.8. Eine nicht-negative Matrix A heißt *irreduzibel*, wenn für jedes Indexpaar (i, j) eine positive ganze Zahl k existiert, so dass

$$[A^k]_{i,j} > 0.$$

Sei $d(i) := \text{ggT}\{k \geq 1 \mid [A^k]_{i,i} > 0\}$ die *Periode* vom Index i , wobei ggT den größten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Wir definieren $d := \infty$, falls $[A^k]_{i,i} = 0$ für alle $k \geq 1$. Zudem nennen wir einen Index i *aperiodisch*, wenn $d(i) = 1$ und eine nicht-negative Matrix A *aperiodisch*, wenn alle ihre Indizes aperiodisch sind.

Lemma 4.2.9. Eine nicht-negative Matrix A ist genau dann primitiv, wenn sie irreduzibel und aperiodisch ist.

Beweis. Siehe [23, S. 18]

□

Beweis von Satz 4.2.7. Wir zeigen zuerst, dass P irreduzibel ist. Seien $i, j \in \{0, \dots, m^n - 1\}$ zwei beliebig gewählte Zahlen. Es gilt

$$\begin{aligned}
& [P^n]_{i,0} \\
&= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} p_{i,k_1} \cdot p_{k_1,k_2} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-2},k_{n-1}} \cdot p_{k_{n-1},0} \\
&= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} \mathbf{P}(Y_1 = k_1 \mid Y_0 = i) \mathbf{P}(Y_2 = k_2 \mid Y_1 = k_1) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}(Y_{n-1} = k_{n-1} \mid Y_{n-2} = k_{n-2}) \mathbf{P}(Y_n = 0 \mid Y_{n-1} = k_{n-1}) \\
&= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} \mathbf{P}\left(\tilde{X}_1 = ([\sigma^{-1}(k_1)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(k_1)]_{n-1}) \mid \tilde{X}_0 = ([\sigma^{-1}(i)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1})\right) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_n = (0, \dots, 0) \mid \tilde{X}_{n-1} = ([\sigma^{-1}(k_{n-1})]_0, \dots, [\sigma^{-1}(k_{n-1})]_{n-1})\right) \\
&\geq \mathbf{P}\left(\tilde{X}_1 = ([\sigma^{-1}(i)]_1, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0) \mid \tilde{X}_0 = ([\sigma^{-1}(i)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1})\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_2 = ([\sigma^{-1}(i)]_1, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-2}, 0, 0) \mid \tilde{X}_1 = ([\sigma^{-1}(i)]_1, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0)\right) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_{n-1} = ([\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, \dots, 0) \mid \tilde{X}_{n-2} = ([\sigma^{-1}(i)]_{n-2}, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, \dots, 0)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_n = (0, \dots, 0) \mid \tilde{X}_{n-1} = ([\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, \dots, 0)\right) \\
&= \underbrace{p([\sigma^{-1}(i)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0)}_{>0} \cdot \underbrace{p([\sigma^{-1}(i)]_1, \dots, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, 0)}_{>0} \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \underbrace{p([\sigma^{-1}(i)]_{n-2}, [\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, \dots, 0)}_{>0} \cdot \underbrace{p([\sigma^{-1}(i)]_{n-1}, 0, \dots, 0)}_{>0} \\
&> 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& [P^n]_{0,j} = \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} p_{0,k_1} \cdot p_{k_1,k_2} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-2},k_{n-1}} \cdot p_{k_{n-1},j} \\
&= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} \mathbf{P}(Y_1 = k_1 \mid Y_0 = 0) \mathbf{P}(Y_2 = k_2 \mid Y_1 = k_1) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}(Y_{n-1} = k_{n-1} \mid Y_{n-2} = k_{n-2}) \mathbf{P}(Y_n = j \mid Y_{n-1} = k_{n-1}) \\
&= \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_{n-1} \leq m^{n-1}} \mathbf{P}\left(\tilde{X}_1 = ([\sigma^{-1}(k_1)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(k_1)]_{n-1}) \mid \tilde{X}_0 = (0, \dots, 0)\right) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_n = ([\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-1}) \mid \tilde{X}_{n-1} = ([\sigma^{-1}(k_{n-1})]_0, \dots, [\sigma^{-1}(k_{n-1})]_{n-1})\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \mathbf{P}\left(\tilde{X}_1=(0,\dots,0, [\sigma^{-1}(j)]_0) \mid \tilde{X}_0=(0,\dots,0)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_2=(0,\dots,0, [\sigma^{-1}(j)]_0, [\sigma^{-1}(j)]_1) \mid \tilde{X}_1=(0,\dots,0, [\sigma^{-1}(j)]_0)\right) \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_{n-1}=(0, [\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-2}) \mid \tilde{X}_{n-2}=(0,0, [\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-3})\right) \cdot \\
&\quad \quad \cdot \mathbf{P}\left(\tilde{X}_n=([\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-1}) \mid \tilde{X}_{n-1}=(0, [\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-2})\right) \\
&= \underbrace{p(0, \dots, 0, [\sigma^{-1}(j)]_0)}_{>0} \cdot \underbrace{p(\dots, 0, [\sigma^{-1}(j)]_0, [\sigma^{-1}(j)]_1)}_{>0} \cdot \dots \\
&\quad \dots \cdot \underbrace{p(0, 0, [\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-2})}_{>0} \cdot \underbrace{p(0, [\sigma^{-1}(j)]_0, \dots, [\sigma^{-1}(j)]_{n-1})}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$[P^{2n}]_{ij} = \sum_{k=0}^{m^n-1} [P^n]_{ik} [P^n]_{kj} \geq [P^n]_{i,0} [P^n]_{0,j} > 0. \quad (4.6)$$

P ist also irreduzibel.

Wir zeigen nun, dass P aperiodisch ist. Da $\text{ggT}\{k, k+1\} = 1$ für $k \in \mathbb{N}$, reicht es zu zeigen, dass $[P^{2n}]_{ii} > 0$ und $[P^{2n+1}]_{ii} > 0$ für einen beliebigen Index i . $[P^{2n}]_{ii} > 0$ folgt sofort aus (4.6), und

$$\begin{aligned}
[P^{2n+1}]_{ii} &= \sum_{0 \leq k_1, k_2 \leq m^n-1} [P^n]_{ik_1} p_{k_1 k_2} [P^n]_{k_2, i} \\
&\geq [P^n]_{i,0} \cdot p_{0,0} \cdot [P^n]_{0,i} \\
&= \underbrace{[P^n]_{i,0}}_{>0} \underbrace{p(0, \dots, 0)}_{>0} \underbrace{[P^n]_{0,i}}_{>0} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

So ist P sowohl irreduzibel als auch aperiodisch, also primitiv. \square

Satz 4.2.10. *Es sei ein $V_{m,n}$ -Spiel (S, p, r) wie in Definition 4.2.1 gegeben. Sei zudem (Y_0, Y_1, \dots) eine Markovkette, die wie in Proposition 4.2.6 definiert ist. Sei ein Zeilenvektor $x = (x_0, \dots, x_{m^n-1}) \in \mathbb{R}^{m^n-1}$ definiert durch*

$$x_\nu = \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(\sigma^{-1}(\nu), z_l) p(\sigma^{-1}(\nu), z_l) \quad \text{für } \nu = 0, \dots, m^n - 1.$$

Dann gilt für alle $k \geq 0$

$$E(c_{k+n}) = C + \mu \left(\sum_{j=0}^k P^j \right) x^T,$$

wobei C das Startkapital und $\mu := (\mathbf{P}(Y_0 = 0), \dots, \mathbf{P}(Y_0 = m^n - 1)) \in \mathbb{R}^{m^n-1}$ die Anfangsverteilung des Spiels ist.

Beweis von Satz 4.2.10. Wir beweisen per Induktion, dass

$$\mu \left(\sum_{j=0}^k P^j \right) x^T = E(c_{k+n}) - C \quad (4.7)$$

mit

$$\begin{aligned} & E(c_{k+n}) - C \\ &= \sum_{j=n}^{k+n} \sum_{0 \leq i_{j-n}, \dots, i_j \leq m-1} r(z_{i_{j-n}}, \dots, z_{i_j}) p(i_{j-n}, \dots, i_j) \mathbf{P}(X_{j-n} = z_{i_{j-n}}, \dots, X_{j-1} = z_{i_{j-1}}) \end{aligned}$$

gilt.

Für $k = 0$ ist

$$\begin{aligned} \mu x^T &= \sum_{\nu=0}^{m^n-1} \mathbf{P}(Y_0 = \nu) \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(\sigma^{-1}(\nu), z_l) p(\sigma^{-1}(\nu), z_l) \\ &= \sum_{\nu=0}^{m^n-1} \mathbf{P}(\tilde{X}_0 = \sigma^{-1}(\nu)) \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(\sigma^{-1}(\nu), z_l) p(\sigma^{-1}(\nu), z_l). \end{aligned}$$

Aus Bijektivität von $\sigma : S^n \rightarrow \{0, \dots, m^n - 1\}$ folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \mu x^T &= \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_{n-1} \leq m-1} \mathbf{P}(\tilde{X}_0 = (z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}})) \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_l) p(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_l) \\ &= \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \leq m-1} r(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_{i_n}) p(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_{i_n}) \mathbf{P}(\tilde{X}_0 = (z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}})) \\ &= \sum_{0 \leq i_0, \dots, i_{n-1}, i_n \leq m-1} r(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_{i_n}) p(z_{i_0}, \dots, z_{i_{n-1}}, z_{i_n}) \mathbf{P}(X_0 = z_{i_0}, \dots, X_{n-1} = z_{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, dass die Behauptung (4.7) für ein $k \geq 0$ gilt und beweisen, dass

$$\mu \left(\sum_{j=0}^{k+1} P^j \right) x^T = E(c_{k+n+1}) - C.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mu \left(\sum_{j=0}^{k+1} P^j \right) x^T &= \mu \left(\sum_{j=0}^k P^j \right) x^T + \mu P^{k+1} x^T \\ &= E(c_{k+n}) - C + \mu P^{k+1} x^T \end{aligned}$$

reicht es zu zeigen, dass

$$\mu P^{k+1} x^T = E(c_{k+n+1}) - E(c_{k+n})$$

gilt.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \mu P^{k+1} x^T \\
&= \sum_{\nu=0}^{m^n-1} [\mu P^{k+1}]_{\nu} \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(\sigma^{-1}(\nu), z_l) p(\sigma^{-1}(\nu), z_l) \\
&= \sum_{0 \leq i_{k+1}, \dots, i_{k+n} \leq m-1} [\mu P^{k+1}]_{\sigma(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}})} \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l) p(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Bijektivität von σ folgt.

Unter Verwendung von (4.5) gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
& \sum_{0 \leq i_{k+1}, \dots, i_{k+n} \leq m-1} [\mu P^{k+1}]_{\sigma(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}})} \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l) p(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l) \\
&= \sum_{0 \leq i_{k+1}, \dots, i_{k+n} \leq m-1} \mathbf{P}(X_{k+1} = z_{i_{k+1}}, \dots, X_{k+n} = z_{i_{k+n}}) \sum_{0 \leq l \leq m-1} r(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l) p(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_l) \\
&= \sum_{0 \leq i_{k+1}, \dots, i_{k+n}, i_{k+n+1} \leq m-1} r(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_{i_{k+n+1}}) p(z_{i_{k+1}}, \dots, z_{i_{k+n}}, z_{i_{k+n+1}}) \mathbf{P}(X_{k+1} = z_{i_{k+1}}, \dots, X_{k+n} = z_{i_{k+n}}) \\
&= E(c_{k+n+1}) - E(c_{k+n}).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Aus dem vorhergehenden Satz und Satz 4.2.7 folgt, dass jedes $V_{m,n}$ -Spiel (S, p, r) durch ein PB-Spiel (P, x) vollständig beschrieben wird, falls die Abbildung $p : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ positiv ist. So können wir jedes $V_{m,n}$ -Spiel (S, p, r) mit einer positiven Abbildung p in die Kategorie der PB-Spiele einordnen. Eine wichtige Folgerung dieser Tatsache ist, dass die Bestimmung der asymptotischen Gewinnwahrscheinlichkeit eines $V_{m,n}$ -Spiels äquivalent zur Bestimmung des Vorzeichens von $\langle \pi, x \rangle$ ist, wobei π der Perron-Eigenvektor von P ist.

Beispiel 4.2.11. Sei ein $V_{2,2}$ -Spiel (S, p, r) mit Ergebnismenge $S = \{z_0, z_1\}$ gegeben. Die Abbildung $p : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$\begin{aligned}
p(z_0, z_0, z_0) &= 1 - q_1, & p(z_0, z_0, z_1) &= q_1, & p(z_0, z_1, z_0) &= 1 - q_2, \\
p(z_0, z_1, z_1) &= q_2, & p(z_1, z_0, z_0) &= 1 - q_3, & p(z_1, z_0, z_1) &= q_3, \\
p(z_1, z_1, z_0) &= 1 - q_4, & p(z_1, z_1, z_1) &= q_4
\end{aligned}$$

definiert, wobei $0 < q_1, \dots, q_4 < 1$. Die hieraus resultierende PB-Matrix P hat die Gestalt

$$P = \begin{bmatrix} 1 - q_1 & q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - q_2 & q_2 \\ 1 - q_3 & q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - q_4 & q_4 \end{bmatrix}$$

und ist dieselbe Matrix wie in (4.1) auf S. 48. Für eine Ertragsfunktion $r : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $r(z_{i_0}, z_{i_1}, z_0) = -1$ und $r(z_{i_0}, z_{i_1}, z_1) = 1$ für alle $z_{i_0}, z_{i_1} \in S$ ist der Gewinnvektor $x = (x_0, \dots, x_3) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} x_0 &= r(z_0, z_0, z_0)(1 - q_1) + r(z_0, z_0, z_1)q_1 = 2q_1 - 1 \\ x_1 &= r(z_0, z_1, z_0)(1 - q_2) + r(z_0, z_1, z_1)q_2 = 2q_2 - 1 \\ x_2 &= r(z_1, z_0, z_0)(1 - q_3) + r(z_1, z_0, z_1)q_3 = 2q_3 - 1 \\ x_3 &= r(z_1, z_1, z_0)(1 - q_4) + r(z_1, z_1, z_1)q_4 = 2q_4 - 1. \end{aligned}$$

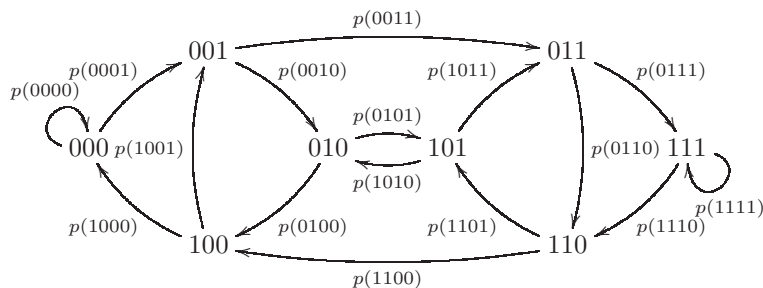
Das $V_{2,2}$ -Spiel (S, p, r) ist schließlich ein PB-Spiel (P, x) mit oben angegebenen P und x .

Beispiel 4.2.12. Zu einem $V_{2,3}$ -Spiel (S, p, r) mit $S = \{0, 1\}$ und positiver $p : S^4 \rightarrow \mathbb{R}$ gehört die PB-Matrix

$$P = \begin{bmatrix} p(0000) & p(0001) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(0010) & p(0011) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(0100) & p(0101) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(0110) & p(0111) \\ p(1000) & p(1001) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(1010) & p(1011) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(1100) & p(1101) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1110) & p(1111) \end{bmatrix},$$

wobei bei der Darstellung der Argumente von p keine trennende Kommata eingefügt sind.

Folgender Graph ist der Graph $\mathcal{G}(P)$ von P . In den Knoten sind $\sigma^{-1}(i) \in S^3$ anstatt der Zustände $i \in \{0, \dots, 7\}$ eingetragen. Jeder Kante wird eine Übergangswahrscheinlichkeit $p(s_1, s_2, s_3, s_4)$ zugeordnet. Nach Konstruktion von p stehen die ersten drei Ziffern s_1, s_2, s_3 für den Knoten von dem die Kante ausgeht, und die letzten drei Ziffern s_2, s_3, s_4 stehen für den Knoten auf den die Kante zeigt.



Kapitel 5

Schluss

5.1 Fazit

Das Ergebnis dieser Arbeit lässt sich im Großen und Ganzen in drei Punkten zusammenfassen:

Zu dem ersten Punkt gehört die Beantwortung der offenen Fragen von Behrends [1] und Groeber [5], die im wesentlichen auf die *Analyse* von Konvexkombinationen zweier primitiver stochastischer Matrizen reduziert werden können. Hierfür wurde die Perron-Frobenius Theorie vorgestellt, mit deren Hilfe man zum einen über die Existenz der stationären Verteilung stochastischer Matrizen folgende Aussage machen konnte: Ist eine stochastische Matrix P primitiv, so konvergieren ihre Potenzen gegen eine Matrix, deren Zeilen aus dem Perron-Eigenvektor π von P bestehen.

Zum anderen konnte man anhand der Perron-Frobenius Theorie Satz 2.7.4 auf S. 24 beweisen und dadurch die explizite Gestalt der Perron-Eigenvektoren ermitteln. Der Satz besagt, dass der Perron-Eigenvektor π einer primitiven stochastischen Matrix P aus den Cofaktoren von $I - P$ besteht. So ist jede Vektorkomponente des Perron-Eigenvektors einer Konvexkombination von zwei primitiven stochastischen Matrizen in Abhängigkeit vom Mischungsparameter eine rationale Funktion, wobei der Nenner der Funktion auf dem Einheitsintervall ungleich Null ist.

Eine direkte Folgerung der obigen Erkenntnisse und zugleich die Beantwortung der offenen Fragen war, dass man auch die Darstellung für die ϕ -Funktion von PB-Spielen explizit angeben kann und dass diese auch eine rationale Funktion ist, deren Nenner auf dem Einheitsintervall nicht verschwindet.

Der zweite und überwiegende Teil dieser Arbeit befasst sich mit der *Konstruktion* von Paradoxa. Es wurde dafür die Gesamtheit der fairen PB-Spiele untersucht, die dadurch charakterisiert sind, dass das Produkt aus Perron-Eigenvektor und Gewinnvektor Null ergibt. Anhand der Parameterdarstellung

fairer PB-Spiele, welche wir in Kapitel 3 mit Q bezeichnet haben, und mit Hilfe von Satz 2.7.4, das eine explizite Darstellung von Perron-Eigenvektoren ermöglicht, betrachtete ich die Menge der fairen PB-Spiele als eine Nullstellenmenge \mathcal{N} eines Polynoms in mehreren Unbekannten, welche eine $s + n - 1$ -dimensionale C^∞ -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^{s+n} ist. Dies ermöglichte, die Analyse der PB-Spiele auf die Analyse der Untermannigfaltigkeit zu verschieben. Das folgende Diagramm verdeutlicht die bijektiven Beziehungen, die durch die Abbildung (Q, id) hergestellt worden sind.

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n} & \longleftrightarrow & \boxed{\text{Die Menge aller PB-Spiele vom Spieltyp } \Gamma} \\
 \\
 \boxed{\mathcal{N}} & \longleftrightarrow & \boxed{\text{Die Menge aller fairen PB-Spiele vom Spieltyp } \Gamma} \\
 \\
 \boxed{\lambda(w,x)+(1-\lambda)(v,y)} & \longleftrightarrow & \boxed{(\lambda Q(w)+(1-\lambda)Q(v), \lambda x+(1-\lambda)y)}
 \end{array}$$

Die Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} besitzt die Eigenschaft, dass die durch die Schnittbildung von \mathcal{N} und einer beliebigen offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ entstandene Menge $\mathcal{N} \cap W \neq \emptyset$ nicht sternförmig ist. Da die Abbildung Q die Menge der fairen PB-Spiele eines gegebenen Spieltyps auf \mathcal{N} bijektiv abbildet und jede Konvexkombination bewahrt, heißt das obige Ergebnis übersetzt, dass zu jedem fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel existiert, so dass ihre Konvexkombination kein faires Spiel ergibt.

Motiviert wurde diese Betrachtungsweise durch einen Satz in [3]. Dort wurde behauptet, dass man einen Parrondo-Effekt eventuell herstellen kann, falls es eine Mannigfaltigkeit gibt, die keine Hyperebene ist und den Parameterraum der Spiele (in unserem Fall $\mathcal{B} \times \mathbb{R}^n$) in Gewinn- und Verlustbereich teilt. Diese Behauptung ist zwar allgemein formuliert, besitzt aber eine schwache Aussagekraft. (Ein formaler Beweis für den Satz war in [3] auch nicht zu finden). So habe ich in der vorliegenden Arbeit nicht nur die Existenz der Mannigfaltigkeit gezeigt, sondern auch bewiesen, dass der Parrondo-Effekt „allgegenwärtig“ ist.

Der letzte Punkt dieser Arbeit ist die Analyse der vergangenheitsabhängigen Spiele sowie die Herstellung einer Verbindung zwischen vergangenheitsabhängigen Spielen und PB-Spielen. Es wurde zuerst das Original-Beispiel für vergangenheitsabhängige Spiele aus [21] anhand stochastischer Prozessen verallgemeinert; anschließend wurde bewiesen, dass unter einer bestimmten Voraussetzung ein vergangenheitsabhängiges Spiel äquivalent zu einem PB-Spiel ist. Ein wesentlicher Vorteil dieser Erkenntnis ist, dass man die für die PB-Spiele entwickelten Werkzeuge, wie die Ermittlung der asymptotischen Gewinnwahrscheinlichkeit und die Bestimmung der Existenz einer paradoxen Situation, auf bestimmte vergangenheitsabhängige Spiele anwenden kann.

5.2 Ausblick

Ein zentrales Resultat dieser Arbeit bildet Satz 3.2.27 in Kapitel 3, der besagt, dass zu jedem fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel existiert, so dass ihre Konvexkombination kein faires PB-Spiel ist. Hierbei ist zu bemerken, dass sich die Aussage ausschließlich auf *faire* Spiele bezieht. Eine Frage, die sich dabei stellt, ist, unter welchen Voraussetzungen eine gleichwertige Aussage für Gewinn- bzw. Verlustspiele möglich ist. Es lässt sich vermuten, dass es für zwei Verlustspiele nur dann eine gewinnbringende Konvexkombination gibt, wenn sich die Urbilder der Spiele unter der Abbildung Q in der Nähe der Nullstellenmenge \mathcal{N} befinden (vgl. S. 29 ff.). Für eine genaue Formulierung bzw. für den Beweis dieser Behauptung ist eine weitere Analyse der PB-Spiele erforderlich.

Weiterhin stellt sich noch die Frage nach einem konstruktiven Beweis des Satzes. Im Hinblick auf die Anwendungen ist es durchaus interessant, ein Verfahren zu finden, das zu einem gegebenen fairen PB-Spiel ein weiteres faires PB-Spiel bestimmt, das eine gewinnbringende Konvexkombination nach sich zieht. Zusätzlich könnte man von dem letzteren PB-Spiel fordern, dass mit ihm der erwartete Gewinn nach k Runden maximal ist.

Eine tragende Rolle in der Arbeit spielte außerdem Satz 2.7.4 in Kapitel 2. Anhand dieses Satzes konnten wir die Struktur des Perron-Eigenvektors einer primitiven stochastischen Matrix ermitteln, was ferner die Analyse der PB-Spielen in Kapitel 3 überhaupt erst möglich machte. Eine offene Frage ist, ob man die Voraussetzung des Satzes durch eine schwächere Voraussetzung ersetzen kann, indem man Matrizen betrachtet, die „scrambling“ anstatt primitiv sind. Eine Matrix $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ heißt dabei *scrambling*, wenn für alle $i, j = 1, \dots, n$ ein $k \in \{1, \dots, n\}$ existiert, so dass $p_{ik}, p_{jk} > 0$ (siehe [5], [23]).

Nicht zuletzt ist es interessant zu untersuchen, inwiefern PB-Spiele sowie vergangenheitsabhängige Spiele eine Anwendung in der Praxis finden könnten. Ein möglicher Anwendungsbereich für vergangenheitsabhängige Spiele könnte z. B. die technische Analyse sein, die die zukünftigen Kurse an den Börsen aus Kursverläufen der Vergangenheit und verschiedenen Indikatoren ableitet. Da aber die Spiele nicht alle Faktoren der Realität einbeziehen können, wäre für derartige Anwendungen eine starke Vereinfachung des Modells notwendig.

Anhang A

Programmierung

Die in Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen sowie die Erzeugung der zugehörigen Grafiken wurden in Maple und MATLAB programmiert. Die wichtigste Rolle spielte dabei die folgende, auf Satz 2.7.4 basierende Maple-Funktion, die für die symbolischen Berechnungen der Perron-Eigenvektoren eingesetzt wurde.

genPerronEV.m

```
getPerronEV := proc(P)

##
# Eingabe:
#
#   P           Eine primitive stochastische Matrix
#
#
# Ausgabe:
#
#   pi          Der Perron-Eigenvektor der Eingabe P
##

local Id, pi, n, A, i, D;

n := RowDimension(P);
Id := IdentityMatrix(n,n);

A := Id - P;
pi := Vector[row](n);

for i to n do
    # Zur Bestimmung der i-ten Komponente des Perron-Eigenvektors
    # von P wird der Cofaktor von A zum Indexpaar (i,i) berechnet.
    pi[i] := Minor(A, i, i)
end do
end proc;
```

```
end do;

D := 0;

# Der Normierungsfaktor D wird bestimmt.
for i to n do
    D := D + pi[i]
end do;

pi := pi/D;

return pi

end proc;
```


Literaturverzeichnis

- [1] E. Behrends. Parrondo's paradox: a priori and adaptive strategies. preprint (2002), <http://page.mi.fu-berlin.de/behrends/parrondo.dvi>
- [2] S. Bosch *Lineare Algebra* 3. Auflage Springer (2000)
- [3] A. Costa, M. Fackrell, and P. G. Taylor. Two issues surrounding Parrondo's paradox. *Advances in Dynamic Games: Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control* **7** 599-609 (2005)
- [4] A. P. Flitney and D. Abbott. Quantum Parrondo games. *Physica A* **314**(1-4) 35-42 (2002).
- [5] P. Groeber. Konvexe Kombination diskreter dynamischer Prozesse am Beispiel von Parrondo's Paradox. Diplomarbeit (2005), <http://www.math.uni-bremen.de/~groeber/thesis.pdf>
- [6] P. Groeber. On Parrondo's games as generalized by Behrends. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* **341** 223-230 (2006)
- [7] O. Häggström *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications* Cambridge University Press (2002)
- [8] G. P. Harmer and D. Abbott. Losing strategies can win by Parrondo's paradox. *Nature* **402** 864 (1999).
- [9] G. P. Harmer and D. Abbott. Parrondo's paradox. *Statistical Science* **14** 206-213 (1999).
- [10] G. P. Harmer and D. Abbot. A review of Parrondo's paradox. *Fluctuation and Noise Letters* **2** (2002)
- [11] N. F. Johnson, P. Jeffries, and P.M. Hui. *Financial Market Complexity*, Oxford University Press (2003)
- [12] A. Hatcher *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002), <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>

- [13] R. J. Kay and N. F. Johnson. Winning combinations of history-dependent games. *Physical Review* **67** 056128 (2003)
- [14] K. Königsberger *Analysis 2*. 5., korrigierte Auflage. Springer (2000)
- [15] C. F. Lee, N. F. Johnson, F. Rodriguez, and L. Quiroga. Quantum coherence, correlated noise and Parrondo games. *Fluctuation and Noise Letters* **2**(4) L293-L297 (2002).
- [16] N. Masuda and N. Konno, Subcritical behavior in the alternating supercritical Domany-Kinzel dynamics *Eur. Phys. J. B* **40** 313-319 (2004).
- [17] A. N. Langville und C. D. Meyer *Google's PageRank and Beyond* Princeton University Press (2006)
- [18] C. D. Meyer *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Cambridge University Press (2000)
- [19] D. A. Meyer and H. Blumer. Quantum Parrondo games: biased and unbiased. *Fluctuation and Noise Letters* **2**(4) L257-L262 (2002).
- [20] J. M. R. Parrondo. How to cheat a bad mathematician, in *EEC HC&M Network on Complexity and Chaos* (#ERBCHRX-CT940546), ISI Torino, Italy (1996), unpublished, <http://seneca.fis.ucm.es/parr/GAMES/cheat.pdf>
- [21] J. M. R. Parrondo, G. P. Harmer, and D. Abbott. New paradoxical games based on Brownian ratchets. *Physical Review Letters* **85** 5526 - 5529 (2000)
- [22] F. A. Reed, Two-locus epistasis with sexually antagonistic selection: A genetic Parrondo's paradox, *Genetics* **176** 1923-1929 (2007).
- [23] E. Seneta. *Non-negativ Matrices* George Allen & Unwin Ltd (1973)
- [24] D. M. Wolf, V. V. Vazirani, and A. P. Arkin. Diversity in times of adversity: Probabilistic strategies in microbial survival games. *Journal of Theoretical Biology* **234** 227-253 (2005).